

TECHNIQUES DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION À RETENUE(S)

par Roger BASTIEN,
Inspecteur de
l'Éducation nationale

Les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction posent souvent des problèmes aux élèves et aux enseignants. Les propositions qui suivent ont été testées avec succès sur des élèves et sur des enseignants en animation pédagogique. Un seul problème reste en suspens, mais il ne m'appartient pas de le régler : doit-on passer d'une méthode à une autre à l'école élémentaire ? Les seules réponses que je puis donner se résument ainsi :

- S'agissant de techniques, les élèves ont-ils à en apprendre plusieurs pour résoudre un même problème ?
- Ne pourrait-on pas se limiter à une seule technique d'apprentissage et proposer une autre technique en découverte ?
- Faudrait-il, et ce serait le minimum, mettre en place une continuité d'apprentissage et en particulier éviter toute rupture dans l'appropriation ?
- Si une technique est appropriée et donne de bons résultats, pourquoi en changer ?

Les principes sur lesquels reposent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction. Dans la plupart des pays, la numération est dite **de position, à base 10**, c'est-à-dire qu'un nombre donné, par exemple 37 possède deux caractéristiques : 3 désigne le chiffre des dizaines et 7 le chiffre des unités; ce nombre peut s'écrire $(3 \times 10^1) + (7 \times 10^0)$.

Par ailleurs, une forme canonique du nombre serait : $37 = 30 + 7$ où 37 correspond à 3 dizaines et 7 unités (décompositions du nombre 37)

Lorsque l'on regarde les propriétés de l'addition dans l'ensemble des réels, on définit

• **la commutativité :**

$$a + b = b + a$$

• **l'associativité :**

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Si l'on s'intéresse aux propriétés des égalités :

L'égalité ne change pas si l'on ajoute ou retranche la même quantité aux deux membres de l'égalité :

$$a = b \Leftrightarrow a + b = b + a$$

$$a = b \Leftrightarrow a - b = b - c$$

De ces principes et de ces propriétés découlent des techniques opératoires différentes pour l'addition et la soustraction.

◆ L'ADDITION

• TECHNIQUE CLASSIQUE DE L'ADDITION À RETENUE

Attendus théoriques

Les nombres ont été décomposés sous forme

α centaines + β dizaines + δ unités

ce qui se traduit par :

$$(3c + 2d + 5u) + (2c + 5d + 8u) + (1c + 6d + 3u) + \dots + (3c + 2d + 7u)$$

Utilisation de la commutativité et de l'associativité :

$(3 + 2 + 1 + 4 + 1 + 3)$ centaines +

$(9 + 3 + 6 + 8 + 5 + 1)$ dizaines + $(5 + 8 + 3 + 2 + 7 + 7)$ unités

d'où : 14 centaines + 34 dizaines + 32 unités.

En utilisant la propriété de la numération en base 10 :

32 unités se traduit par 3 dizaines (la retenue) et 2 unités

34 dizaines se traduit par 3 centaines (la retenue) et 4 dizaines

14 se traduit par 1 unité de mille 4 centaines

d'où le traductif par ricochets successifs :

1 unité de mille et (4 centaines + 3 centaines) et (4 dizaines + 3 dizaines) et 2 unités

d'où le résultat :

1 unité de mille 7 centaines 7 dizaines 2 unités

ou encore : 1772

Pose opératoire

| | | | |
|---|----|---|---|
| | 3 | 3 | |
| | 3 | 9 | 5 |
| + | 2 | 5 | 8 |
| + | 1 | 6 | 3 |
| + | 4 | 8 | 2 |
| + | 1 | 5 | 7 |
| + | 3 | 1 | 7 |
| | 17 | 7 | 2 |

Commentaires

Au niveau des sommes « en colonne », cette méthode requiert de l'apprenant la connaissance de la sommation des nombres sans erreur jusqu'à 100 au minimum sans algorithme répétitif et l'impossibilité de « compter sur ses doigts ».

La dernière colonne peut comporter au moins un chiffre, voire deux ou plus, ce qui rentre en contradiction pour l'élève apprenant avec ce qui est défini au préalable : dans chaque colonne un chiffre et l'on pose en retenue le chiffre de rang supérieur (cause d'erreurs). Cette méthode demande enfin une attention soutenue et une forte concentration tout au long de l'opération car aucun arrêt n'est possible en cours de tâche.

• MÉTHODE PAR SOMMATIONS PARTIELLES

Principes théoriques

Dans l'addition, la somme des sommations partielles est égale à la somme totale.

Méthode : on effectue des sommes partielles par colonne jusqu'à ce qu'on ait une retenue de 1 que l'on écrit dans la colonne suivante :

$5 + 7 = 12$ je retiens 1 (écrit dans la colonne dizaines) et $2 + 9 = 11$ je retiens 1, je pars de 1 unité, $1 + 8 = 9$ je continue, $9 + 3 = 12$ je retiens 1 et je garde 2; $2 + 6 = 8$ je pose le 8.

Colonne suivante : 3 de retenue plus 7 égale 10, je retiens 1; $0 + 3 = 3$; $3 + 5 = 8$; $8 + 7 = 15$, je retiens 1, je pars de 5; $5 + 8 = 13$; je retiens 1 et je pars de 3; $3 + 8 = 11$ je retiens 1 et pose 1, etc.

Pose opératoire

| | | | | | | | | | |
|---|-----|---|-----|-----|-----|-----|---|---|---|
| | 4 | 8 | 7 | 1 | 0 | 4 | 7 | 5 | |
| | + 2 | 1 | + 3 | + 5 | + 7 | + 2 | 3 | 7 | 1 |
| | + 6 | 6 | + 5 | + 7 | + 1 | + 6 | 5 | 9 | 1 |
| | + 2 | 8 | + 7 | + 1 | 5 | + 2 | 7 | 8 | 9 |
| | + 7 | 1 | + 8 | + 1 | 3 | + 7 | 8 | 3 | 1 |
| | + 4 | 9 | + 8 | + 1 | 1 | + 4 | 8 | 6 | 8 |
| 2 | 9 | 9 | 1 | 1 | 1 | 8 | 8 | 8 | 2 |

Réponse : 2918

Commentaires

Seule est exigible la somme de deux nombres jusqu'à $9 + 9$.

Un algorithme apparaît sous forme d'une retenue unitaire.

Possibilité de pause dans les calculs.

Pas de surcharge cognitive.

Une plus grande rapidité d'exécution.

Une fiabilité plus importante.

Défaut de cette méthode : le problème du soin et de la présentation qui diffèrent de la méthode traditionnelle (calculs latéraux possibles, retenues sous forme de bâtons).

• PROGRAMMATION DE CETTE TECHNIQUE ET EXERCICES PRÉPARATOIRES

Pour que cette technique porte ses fruits, il est nécessaire qu'en **grande section** deux objectifs soient parfaitement maîtrisés :

- La comptine numérique jusqu'à 30;
- Compter de 2 en 2 à partir de 0, puis d'un nombre quelconque.

Au CP :

Calcul mental de toutes les sommes jusqu'à $9 + 9$.

Numération de position.

Échanges de 1 contre 10 (passage à l'unité supérieure).

Notion de dizaine et d'unité.

Au CE1 :

Notions de centaine, classe des milliers.

Amener les enfants à mémoriser les tables d'addition par le biais de jeux.

Un préalable cependant : mémorisation des tables d'addition dès le début du CP sous forme de calcul mental (séances d'environ 5 à 10 minutes par jour) ou au moyen du calcul rapide (les sommes sont indiquées au tableau).

Trois formes sont à privilégier :

$$a + b = ?$$

$$a + ? = c$$

$$d = ? + ?$$

• JEUX POSSIBLES

k

À partir de ce travail peuvent être mis en œuvre 3 types de jeux dont seules figurent les prémisses.

Le jeu de loto

Il peut revêtir deux formes et une forme mixte.

Objectif : somme de 2 nombres, écriture d'un nombre sous forme d'une somme.

Règles : voir celles du jeu de domino.

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $5+7$ | $4+2$ | $3+2$ | $8+1$ | JEU 1 |
| 12 | $1+4$ | 5 | $2+7$ | JEU 2 |
| $6+6$ | $3+5$ | 8 | 11 | JEU 3 |

Premier jeu : reconnaissance de sommes équivalentes provenant de décompositions d'un même nombre.
 Second jeu : associer décomposition d'un nombre et sa somme.
 Troisième jeu : associer à un nombre sa décomposition ou associer à une décomposition un nombre.

Ces jeux reposent sur l'association d'une somme à un nombre de la grille.

| | | | | |
|-----------------------|-------|----|----|----|
| 14 | 19 | 23 | 18 | 23 |
| 2 | 17 | 19 | 13 | 19 |
| 17 | 15 | 16 | 25 | 9 |
| 19 | 12 | 6 | 5 | 12 |
| CARTES TIRÉES AU SORT | | | | |
| $14+7$ | $8+5$ | | | |

Ce jeu se compose de deux parties : un tableau comprenant des sommes et des cartes tirées au sort sur lesquelles figurent des opérations à effectuer (le nombre de cartes doit être supérieur au nombre de cases à couvrir).

Les modalités du jeu : 3, 4 ou 5 équipes s'affrontent; le vainqueur est l'équipe qui aura trouvé dans le moins de temps pos-

sible toutes les solutions proposées ou toutes les 5 secondes chaque équipe tire une carte présentée dans un sabot (à chaque équipe de s'organiser).

Première variante du jeu :

Le tableau mural présente uniquement des opérations, les équipes tirant au sort des nombres

| | |
|--------------------|-------------------|
| $9 + 7$ | 14 |
| élément du tableau | exemple de cartes |

Seconde variante du jeu :

Le tableau mural présente des additions à trou, les cartes figurant les éléments manquants

| | |
|--------------------|-------------------|
| $9 + \quad = 16$ | 14 |
| élément du tableau | exemple de cartes |

Autres jeux (connus) :

Le jeu du banquier où s'opèrent des échanges de 10 (unités) contre 1 (dizaine). Ce jeu est divulgué dans tous les ouvrages des IREM. Les stratégies engagées mènent à l'addition à retenue.

L'usage du boulier est à mon avis plus problématique car, s'il permet à l'élève de comprendre par manipulation le sens de la retenue, il obère toute mémorisation des tables et remplace cette dernière par un décomptage 1 à 1 ou 2 à 2 des boules.

◆ LA SOUSTRACTION : LA THÉORISATION DES TECHNIQUES

• LA TECHNIQUE CLASSIQUE FRANÇAISE

Elle n'est apparue en fait en France qu'au XVIII^e siècle par l'usage qu'en faisaient les comptables et les trésoriers payeurs.

Théorème de base

La différence ne change pas si on ajoute la même quantité aux deux termes de la différence :

$$a - b = (a + c) - (b + c)$$

Il suffit de décomposer les deux termes de la différence sous leur forme canonique en base 10 et dans l'exemple qui suit ajouter 1 dizaine ou 10 unités aux deux termes.

Le nombre abc s'écrit sous forme canonique a centaine + b dizaine + c unités.

Le nombre def s'écrit sous forme canonique d centaine + e dizaine + f unité.

$abc - def = (a \text{ centaine} - d \text{ centaine}) + (b \text{ dizaine} - e \text{ dizaine}) + (c - f) \text{ unités}$.

Dans l'exemple, $c < f$, on ajoute donc une dizaine aux deux nombres, mais pour le premier aux unités sous forme 10, et pour le second aux dizaines sous forme d'une dizaine supplémentaire :

$(a \text{ centaine} - d \text{ centaine}) - (b \text{ dizaine} - e \text{ dizaine}) + (c - f) \text{ unités}$ s'écrit alors :
 $(a \text{ centaine} - d \text{ centaine}) + [b \text{ dizaine} - (e \text{ dizaine} + 1 \text{ dizaine})] + [(c + 10) - f] \text{ unités}$.

Dans l'exemple choisi :

$$453 - 238 = (4c + 5d + 3u) - (2c + 3d + 8u) = [4c + 5d + (10 + 3) u] - [2c + (3d + 1d) + 8 u]$$

| | | |
|---|---|----|
| 4 | 5 | 13 |
| - | 2 | 38 |
| 2 | | |
| | 1 | 5 |

La répétition du chiffre 3 a été voulue.

Commentaire

Cette technique ne peut en élémentaire être comprise par les enfants qui trop souvent confondent la retenue affectée aux unités avec celle affectée aux dizaines : lecture indifférente 4 ou 13.

Remarque pédagogique importante

Cette technique vient en contradiction de la technique envisagée pour l'addition où des échanges de 10 pour 1 dizaine étaient effectués; ici les échanges ne sont pas visibles (stricto-sensu), la position des « retenues » n'est pas identique mais la litanie est, elle, identique (première colonne, prononciation du mot contenant la retenue sous forme + 10 et dans la colonne des dizaines addition d'une unité de classe 10) donc pertes de repères topologiques et destruction de l'apprentissage de l'addition à retenue.

• LA SOUSTRACTION ANGLO-SAXONNE

Elle est basée sur les propriétés de la numération en base 10 et des échanges de 10 pour 1 ; cette technique se situe dans le droit fil de la technique de l'addition à retenue et de la réciprocity de ces deux opérations.

Cette technique reprend la forme classique centaines, dizaines, unités.

$abc - def = (a - d)$ centaines + $(b - e)$ dizaines + $(c - f)$ unités.

Si $e < f$, on réécrit le nombre en enlevant 1 dizaine et en lui ajoutant 10 unités

abc s'écrit alors a centaines + $(b - 1)$ dizaines + $(c + 10)$ unités.

| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r} 453 \\ - 238 \\ \hline 215 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 4 \quad \quad 13 \\ 4 \quad \quad 5 \quad \quad 8 \\ - 2 \quad \quad 3 \quad \quad 8 \\ \hline 2 \quad \quad 1 \quad \quad 5 \end{array}$ |
|---|---|

Commentaires

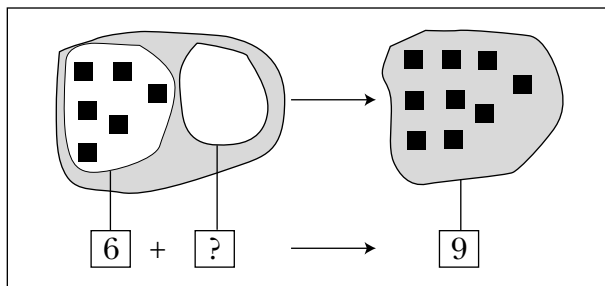
Il s'agit d'une technique appliquée dans les classes de CE1 qui est par la suite abandonnée au profit de la technique classique française, ce qui se révèle désastreux pour un certain nombre d'élèves.

Pourquoi alors ne pas briser le tabou et continuer toujours en se basant sur une seule technique et en particulier celle-ci?

• LA PROGRAMMATION DES ACTIVITÉS

Dès la grande section de la maternelle, les pré-algèbres de la soustraction peuvent s'envisager sous forme de calcul mental et de complétion à 10.

Par exemple :



Commentaire :

Faire oraliser la situation; utiliser les verbes «ajouter» et «manquer».

Remarques : autant le symbole + est utilisable sans grandes difficultés en GS, autant le signe d'égalité est déconseillé car il possède un sens précis.

De même, ignorer le signe de la soustraction, qui, introduit trop tôt, amènera une assimilation entre «moins» et -, ce qui parfois se révèle faux dans les expressions «de moins en moins».

Au niveau CP

Rappel sur le calcul mental et sur le calcul rapide qui doivent faire apparaître les formes de complétion jusqu'à 19.

Exemples :

$$4 + ? = 8$$

$$9 + ? = 16$$

$$18 = 19 - ?$$

$$15 = 19 - ?$$

$$16 - 8 = ?$$

$$15 - 9 = ?$$

Mais également $15 = ? - ?$ (donner 4 réponses au moins)
 $12 = ? - ?$ (donner 4 réponses)

• MISE EN PLACE DE TABLEAUX DIDACTIQUES

L'addition

Ce tableau présenté page suivante peut permettre aux élèves de visualiser la somme de deux nombres. Affiché en permanence, il peut ainsi aider à mémoriser les tables.

Habituellement, la présentation consiste à remplir les cases avec les sommes calculées, ce travail est utile mais insuffisant si l'on souhaite que les décompositions des nombres soient reconnues. Ainsi, sur une même ligne apparaissent toutes les décompositions de la somme 10 et sur une même colonne, toutes les additions dont l'un des termes est connu (ici le terme est 2).

La colonne «somme» ou «résultat» a été dupliquée en pensant à la fois aux sens de lecture chez l'enfant mais aussi aux enfants gauchers.

Autre avantage : ce type de tableau facilite la lecture chez l'enfant : recherche verticale puis horizontale et non recherche par coordonnées.

Pour ajouter à un nombre le nombre 7, on ajoute 10 et l'on retranche 3.

Pour retrancher à un nombre le nombre 7, on retranche 10 et l'on ajoute 3; ces deux phrases procèdent de techniques cohérentes entre elles.

On fait de même avec 8 (suppression/ajout) de 2 à 10 qui a été (ajouté/retranché).

On fait de même avec 9 (suppression/ajout) de 1 à 10 qui a été (ajouté/retranché).

• LES JEUX POSSIBLES

Outre les jeux précédents où les sommes sont à remplacer par des différences, on peut également envisager le jeu de la caisse (jeu connu). Il s'agit de travailler sur la notion d'écart sur la droite numérique.

Objectif : rendre la monnaie sur une somme donnée avec des pièces de 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 cent d'euros.

Exemple :

Un objet coûte 378 cents, combien doit-on rendre sur 500 cents?

$$378 + 2 \Rightarrow 380$$

$$380 + 20 \Rightarrow 400$$

$$400 + 100 \Rightarrow 500$$

$$\text{d'où } 378 + 122 = 500 \Leftrightarrow 500 - 378 = 122$$

Il est possible de complexifier la tâche en utilisant des nombres quelconques a et b (avec a somme remise supérieur à b prix de l'objet); de travailler sans pièces mais sur ardoise (calcul rapide) ou d'utiliser le calcul mental.

Roger BASTIEN

Inspecteur de l'Éducation nationale