ACADÉMIE DE NANCY-METZ
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Académie de Nancy-Metz

Mardi 15 mars 2023 (matin)
Seconde partie - Exercices académiques
Élèves suivant la spécialité « mathématiques »

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »).
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.
Les élèves qui travaillent en groupes doivent s'organiser pour rendre une copie commune au groupe.

C'est de la balle !

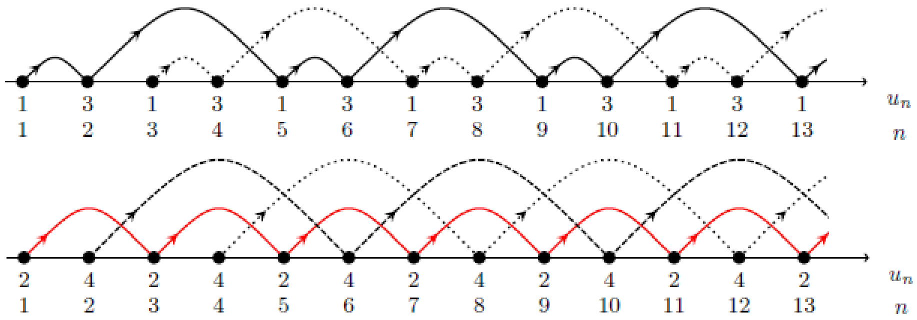
On s'intéresse aux suites d'entiers strictement positifs dites *périodiques*, comme par exemple : $1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, \cdots$ (de période 3), $1, 5, 1, 5, 1, 5 \cdots$ (de période 2) ou encore $4, 4, 1, 4, 4, 4, 1, 4, \cdots$ (de période 4). Plus précisément, une suite (u_n) est dite de période T si T est le plus petit entier strictement positif tel que pour tout entier $n > 0$, on a : $u_{n+T} = u_n$.

Puisque les termes se répètent, on notera : $1, 5, 1, 5, 1, 5 \cdots = \overline{1, 5}$, ou encore $1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, \cdots = \overline{1, 2, 4}$.

Cette écriture n'est pas unique (par exemple $\overline{4, 1} = \overline{4, 1, 4, 1}$) mais on utilisera de préférence la plus courte.

1. Déterminer les périodes des suites $\overline{1, 3, 1, 3}$, $\overline{5, 5, 1}$ et $\overline{2, 2, 2}$.

2. Les graphiques ci-dessous ont été construit respectivement à partir des suites $\overline{1, 3}$ et $\overline{2, 4}$.



a) À partir des observations que vous ferez de ce graphique, construire celui de la suite $\overline{4, 4, 1}$. On utilisera des couleurs pour distinguer les différentes composantes et on placera 15 sommets, donc jusqu'à $n = 15$.

Les points noirs sont appelés les *sommets* du graphique. L'axe horizontal est l'axe du temps. Les courbes sont appelées *trajectoires*. Ainsi le graphique de $\overline{1, 3}$ possède deux trajectoires, celui de $\overline{4, 4, 1}$ en possède trois.

Une suite est dite une *jongle* si les trajectoires n'ont pas de sommets communs.

b) Parmi les suites $\overline{1, 2, 3}$, $\overline{4, 2, 4}$ et $\overline{5, 5, 1}$, deux ne sont pas des jongles. Lesquelles ? Des arguments graphiques seront acceptés pour justifier la réponse.

c) Montrer que si (u_n) est une suite constante qui s'écrit $\overline{k}$, alors (u_n) est une jongle à k trajectoires.

Dans la suite on va établir plusieurs conditions pour qu'une suite périodique donnée soit une jongle.

3. a) Expliquer pourquoi, si dans la suite (u_n), il existe deux termes consécutifs u_k et u_{k+1} qui vérifient l'égalité $u_k = u_{k+1} + 1$, alors (u_n) n'est pas une jongle.

b) Donner un exemple de suite (u_n) périodique qui n'est pas une jongle mais dont les tous termes consécutifs u_k et u_{k+1} vérifient : $u_k \neq u_{k+1} + 1$.

4. a) Comment s'écrit la suite $\overline{1, 2, 3}$ si on supprime son premier terme ?

b) Supprimer le premier terme d'une suite (ex : $3, 4, 3, 4, 3, \cdots$ devient $4, 3, 4, \cdots$) ne change pas le fait que ce soit une jongle ou pas : expliquer pourquoi.

La nouvelle suite ainsi obtenue, est appelée un *décalage* de la suite initiale. Plus généralement, on appellera décalage de la suite (u_n) toute suite obtenue par suppression d'un ou de plusieurs termes initiaux : par exemple, les suites $\overline{4, 1, 4}$ et $\overline{1, 4, 4}$ sont des décalages de la suite $\overline{4, 4, 1}$.

c) Écrire tous les décalages possibles des suites $\overline{5, 1}$ et $\overline{2, 2, 3, 1}$.

d) En considérant ses décalages, montrer que la suite $\overline{92, 57, 93}$ n'est pas une jongle.

5. a) On considère une jongle (u_n) non constante. Montrer qu'il existe un décalage de (u_n) de la forme $\overline{a, b, \cdots}$ où a est le plus grand terme de la suite, et où b est strictement inférieur à $a - 1$.

On admet le théorème suivant : $\overline{a, b, \cdots}$ (où a est le plus grand terme de la suite et b est strictement inférieur à $a - 1$) est une jongle si et seulement si $\overline{b + 1, a - 1, \cdots}$ en est une également. Elles ont alors le même nombre de trajectoires. (On précise que les autres termes désignés dans ces expressions par « $\cdots$ » ne changent pas).

b) Prouver que $\overline{51, 52, 53}$ et $\overline{15, 11}$ sont des jongles et calculer combien de trajectoires elles possèdent.

c) Montrer que $\overline{91, 92, 94}$ n'est pas une jongle.

d) Déterminer une jongle de période 3, à 4 trajectoires, contenant un « 2 ».

Partage équitable

On désire partager un triangle ABC en deux parties de même aire à l'aide d'une droite parallèle à un des côtés, en utilisant **seulement** une règle **non graduée** et un compas.
On considère le point $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$, tels que la droite (MN) soit parallèle au côté $[BC]$, comme sur la *Figure 1* :

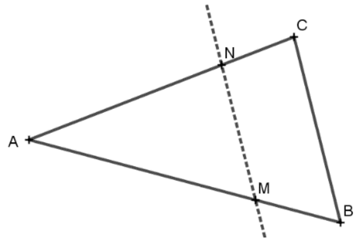


Figure 1

Préambule :

1. Déterminer une méthode pour tracer la droite perpendiculaire à (RS), passant par T, à l'aide des outils à disposition.
2. De même, déterminer une méthode permettant de tracer la parallèle à (RS) passant par T.

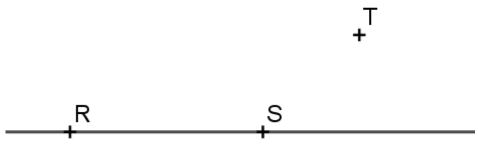


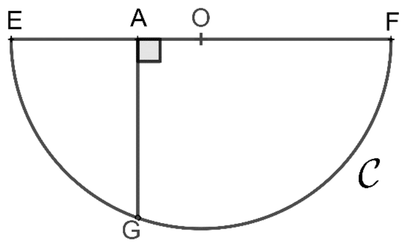
Figure 2

Partie A :
Dans toute cette partie, on considère que le triangle est rectangle en B. On note $\mathcal{A}_{AMN}$ l'aire du triangle AMN et $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC.
1. Montrer que pour partager le triangle ABC avec la droite (MN) en deux parties de même aire, il faut que :
$$\mathcal{A}_{AMN} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC}$$
2. On note $k = \frac{AM}{AB}$. Montrer alors que $MN = kBC$.
3. En déduire que $\mathcal{A}_{AMN} = k^2\mathcal{A}_{ABC}$ et que, pour répondre au problème posé, il faut que $AM = \sqrt{\frac{1}{2}}AB$.

Partie B :

En traçant la hauteur issue de A dans un triangle ABC quelconque, montrer que la condition $AM = \sqrt{\frac{1}{2}}AB$ est suffisante pour s'assurer que la droite $(MN)//(BC)$ réponde au problème posé.

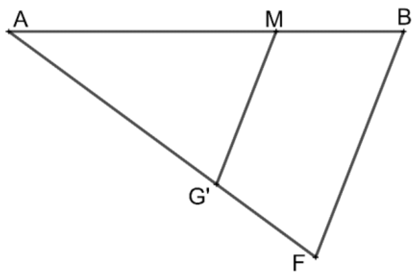
Partie C :
On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de diamètre $[EF]$ avec $A \in [EF]$, et $G \in \mathcal{C}$ tel que $(AG) \perp (EF)$, comme sur la figure ci-contre :



1. Montrer que le triangle EFG est rectangle en G.
2. En exprimant l'aire du triangle EFG de deux manières différentes, montrer que : $EG^2 \times GF^2 = AG^2 \times EF^2$
3. En partant de la relation précédente et en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles EAG et AGF, montrer que :
$$AG^4 + EA^2 \times AF^2 = 2EA \times AF \times AG^2$$
4. A l'aide de la relation précédente et d'une identité remarquable, montrer que $AG^2 = EA \times AF$.
5. En déduire que, quel que soit la valeur $\alpha > 0$, si $AF = 4\alpha$ et si $EA = 2\alpha$ alors :

   le cercle $\mathcal{C}$ est de rayon 3α et $AG = \sqrt{\frac{1}{2}}AF$.

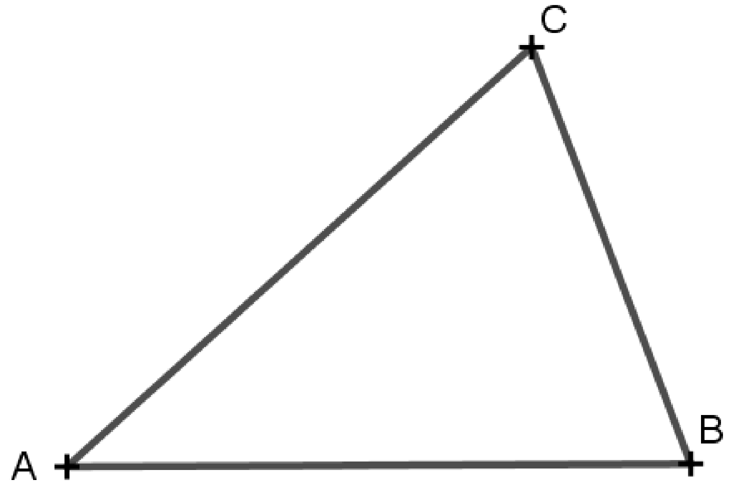
Partie D :



1. Dans la figure ci-contre on considère que les droites (MG') et (BF) sont parallèles. Montrer que si $AG' = xAF$ avec $x \in [0; 1]$, alors $AM = xAB$.
2. En déduire le tracé de la droite (MN) qui partage le triangle ABC fourni en annexe (à rendre avec la copie). On laissera apparent tous les tracés nécessaires à sa construction.

N° d’anonymat uniquement : ……………………………………

Annexe :



Tracé final possible :