Apprentissage du système de numération

et

Résolution de problèmes!

Aux Cycle 2 et Cycle 3.

L’exposé se déroulera en cinq parties:

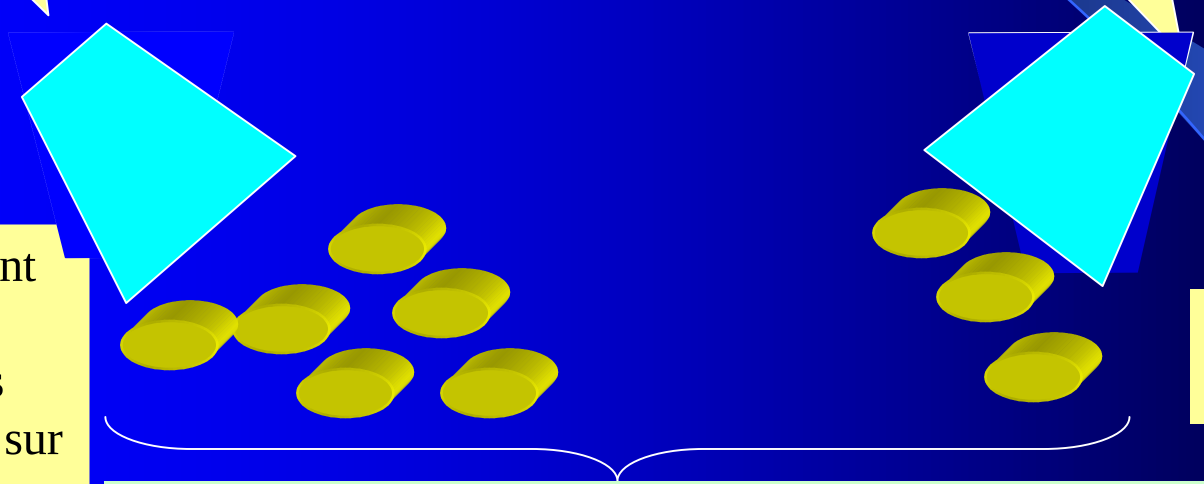
1) Un préambule sur: « c’est quoi faire des mathématiques? »
2) Les différentes parties concernant l’apprentissage du nombre à l’École Élémentaire.
3) Exposé des grandes connaissances ou compétences concernant les prémices de l’apprentissage du nombre (Cycle 1, GS, 1/3 CP).
4) Les points clefs de l’apprentissage du système de numération, difficultés et obstacles….
5) La structure « additive et soustractive » et la résolution de problèmes: quand? pourquoi? comment?…

1ère partie, un préambule:

Situation A

Un gobelet contenant: 5 jetons

Un autre gobelet contenant: 3 jetons



L'enseignant retourne le gobelet, les jetons sont sur la table.

De même pour le second gobelet.

Tous les jetons sont donc sur la table!.

Consigne: « combien y-a-t'il de jetons sur la table? »

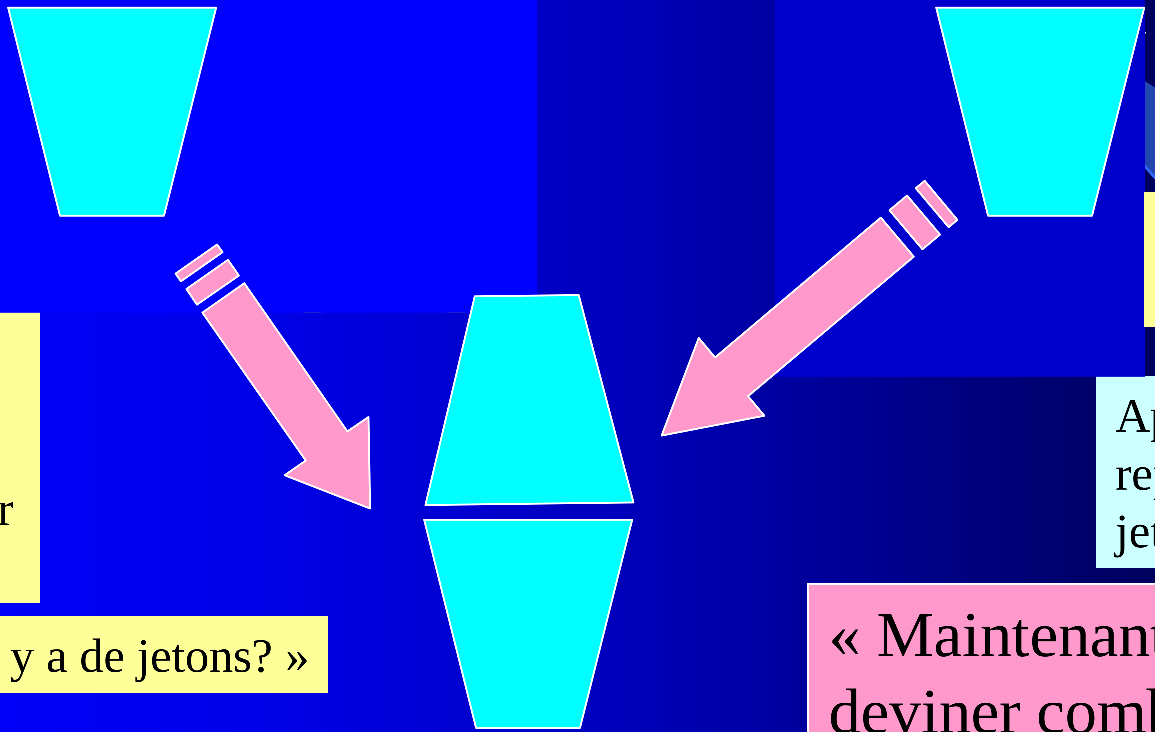
Il n'y a aucune mathématique mise en œuvre par le sujet à partir de ce dispositif… Pourquoi?

- ▶ Parce que le réel est présent, le sujet ne fait que dénombrer,
- ▶ Parce que la réponse fait partie de la consigne…

Situation B

Un gobelet
contenant: 5 jetons

Un autre gobelet
contenant: 3 jetons



L'enseignant retourne le gobelet, les jetons sont sur la table:

« Combien il y a de jetons? »

Après la réponse il replace les jetons dans le gobelet.

De même pour le second gobelet:

« Combien il y a de jetons? »

Après la réponse il replace, également, les jetons dans le gobelet.

« Maintenant! Peux-tu deviner combien il y a de jetons cachés dans mes gobelets? »

Ici, à partir de ce dispositif, des mathématiques sont mises en œuvre par le sujet.
Pourquoi?

- Parce que le réel s’est **<u>estompé</u>**,
- Parce que le sujet est obligé d’**<u>anticiper</u>** une réponse,
- Parce que la procédure nécessaire pour obtenir une réponse, **<u>est à la charge</u>** du sujet, et de lui seul…
- Parce que la **<u>validation</u>** reste tout de même possible, par un simple retour du réel (*la vision des jetons*)…
- Parce qu’il est obligé de **<u>symboliser</u>**, ou de **<u>schématiser</u>** la situation.
- Comment?
- Par exemple, en utilisant ses doigts (ou faire un dessin),
- qui est **<u>une représentation analogique du contenu des gobelets</u>**… Par exemple:

2ème partie: Les grandes questions concernant l’apprentissage…

Ce qui est dorénavant incontournable :

Il y a des apprentissages numériques à l’École Maternelle.

Et ces prémices sont essentielles!

(Voir les compétences sur les I.O. 2002 concernant la Maternelle)

Cela impose une réflexion sur une certaine hétérogénéité des classes de CP.

<u>**Les questions de fond, sont**</u> :

- ➔ Quelles activités et situations sont possibles pour les élèves de GS,
- ➔ Puis de CP et de CE1?…
- ➔ Pour quels apprentissages ou quelles compétences (*pour ceci, voir les I.O. de 2002*).
- ➔ Sous couvert de quelle didactique et pédagogie ?
- ➔ Quels sont les points forts de l'apprentissage du nombre ? quelles difficultés (ou obstacles) vont rencontrer les élèves ?
- ➔ Quelles sont les connaissances fondamentales qui composent l'apprentissage des règles de la numération?

● BIBLIOGRAPHIE

Pour ce qui concerne la Maternelle:

- **« Découvrir le monde avec les mathématiques »** ; D. Valentin, aux Eds Hatier.
  - ➥ un livre pour les situations G.S.
- **« Apprentissages numériques et résolution de problèmes »** ; Ermel, GS, aux Editions Hatier.
- **« Des situations pour apprendre le nombre , Cycle 1 et GS »** ; L. Ney, C. Rajain, E. Vaslot, au CDDP.
- **« Les activités mathématiques en maternelle** » ; J. Briand, M. Loubet, M.H. Salin, CD-Rom, aux Eds Hatier.

Pour ce qui concerne l'École Élémentaire:

- « **Apprentissages numériques et résolution de problèmes CP, CE1**», ERMEL; aux Editions Hatier.
- **« Cap-Maths CP et CE1 »**, R. Charnays; aux Editions Hatier.

Les différentes parties concernant la construction du nombre:

Partie 1

Les quantités / les nombres

Le SENS des nombres…

Des outils pour communiquer :
Les codes oraux,
Les codes écrits.
Les différents supports : B.N. et tableaux de nombres…

Partie 2

Les règles sur les écrits : la numération.

Pourquoi un nombre s'écrit ainsi ?
Dans 253 :
→ c'est quoi le 2,
→ le 5,
→ le 25 ?
→ **A quoi ça sert** de le savoir?

Partie 3

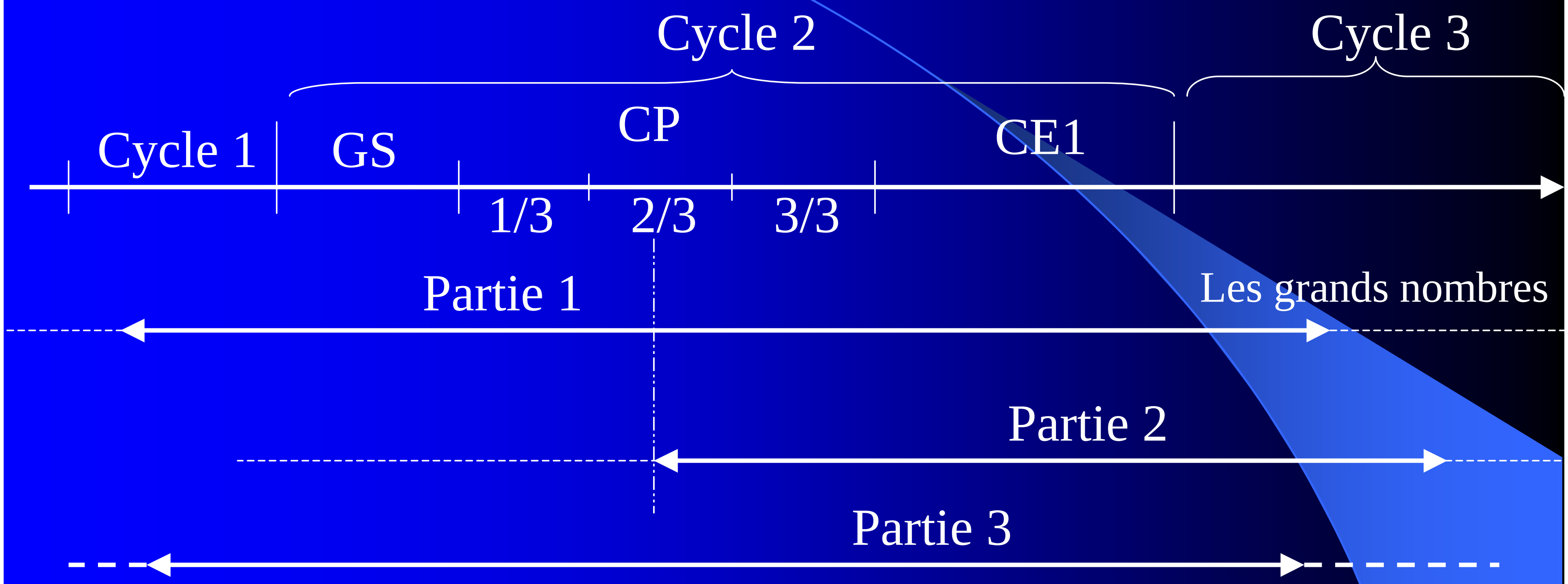
Les structures :

La structure « additive / soustractive ».

Les différents problèmes.
La typologie des problèmes.
Les difficultés et les obstacles concernant la résolution.

Les diverses procédures:
→ Les personnelles, les débrouillardes, comment elles évoluent…
→ Les procédures expertes (les techniques opératoires usuelles)…

Les différents domaines scolaires concernés:



La partie 1: Le sens du nombre (quantité, codes oraux et écrits), c'est essentiel pour accéder à la partie 2.

La partie 2: ses prémices commencent en fin de GS, elle démarre au 2ème tiers du CP, se prolonge pendant une partie du Cycle 3.

La partie 3: elle concerne tous les niveaux…

Réponses aux questions concernant la partie 1:

C'est en pratiquant et en utilisant le nombre que l'on apprend le nombre…

Le sens du nombre: « le nombre ça sert à quoi? »,

Le nombre, il sert à *(3 points fondamentaux)*:

➔Mémoriser les quantités, pour construire des collections « équipotentes » sans la présence explicite de la collection de référence….

➔ Comparer les quantités, sans la présence explicite de celles-ci…

➔ Agir sur les quantités, sans la présence explicite de celles-ci (à les transformer, anticiper sur leur réunion, les partager). Donc, à calculer…

Concernant les procédures:

- ➔ Les procédures, mises en œuvre par les élèves, doivent être « débrouillardes » et «personnelles »..
- ➔ Les « procédures personnelles » doivent **<u>évoluer</u>** vers des procédures de plus en plus expertes (MS → CE1).
- ➔ **<u>Pour le moment</u>**, la procédure experte de l'addition est la seule exigée en fin de Cycle 2.
- ➔ Aucune introduction de signes conventionnels (*autres que les chiffres*, *le moment venu*) jusqu'à la fin du 1er tiers du CP.
- ➔ Les signes « + », « - » et « = » sont introduits au cours des 2ème et 3ème tiers du CP (d'une manière relativement concomitante).
- ➔ A **la Maternelle, (→ GS), les supports et les milieux organisés doivent, le plus souvent, être composés de matériels effectifs,.**
- ➔ Les moments et les tâches réservés à la feuille de papier (espace graphique) doivent être ciblés (*surtout en Maternelle*):
  - ➔ Sur l'axe pédagogique: travail en autonomie,
  - ➔ Sur l'axe didactique: travail de schématisation (passage du réel à la représentation, fondamental dans la réflexion mathématique et l'initiation des opérations mentales)…

Tout ceci dans des tâches (*constitutives des situations*), qui:

➔ Forcent les opérations mentales, en mettant à distance les procédures sensori-motrices…

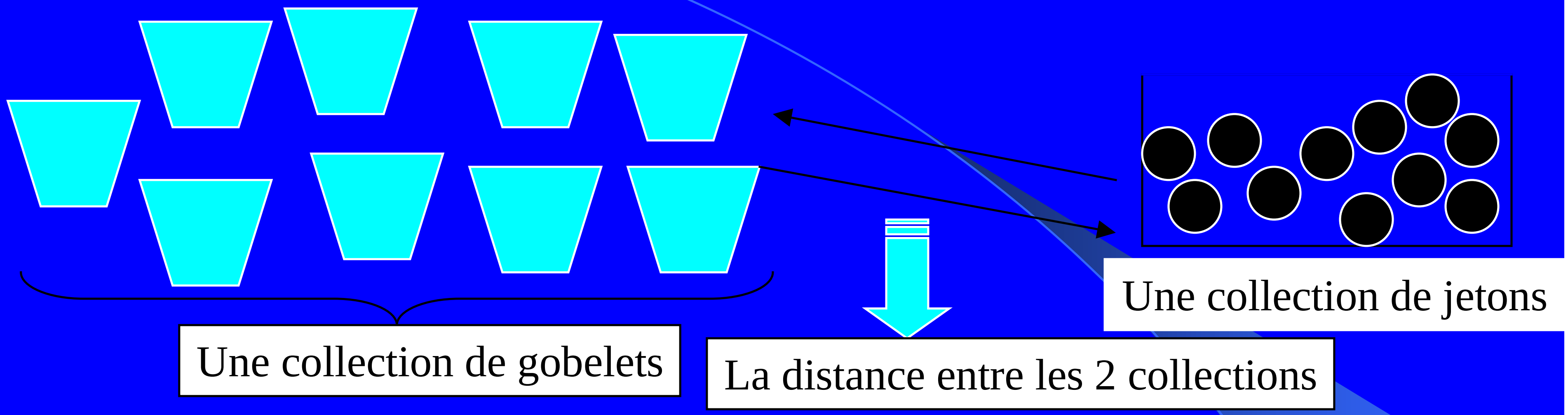
➔ A ce sujet: une réflexion doit être menée sur:

- La manipulation,
- Les activités « ludiques » (le jeu à la maternelle)…)

<u>Paradoxe didactique</u>: Les élèves ne peuvent pas se passer de manipuler, mais quand ils manipulent ils n'apprennent pas…

➔ C'est la gestion conscientisée de ce dilemme qui fonde la « situation-problème »…

Un exemple fondamental: « la situation des … voleurs, les lutins,.. le robot, … etc.… »

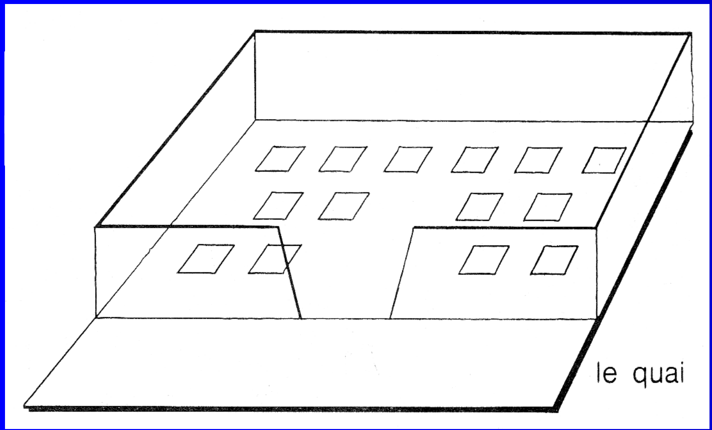


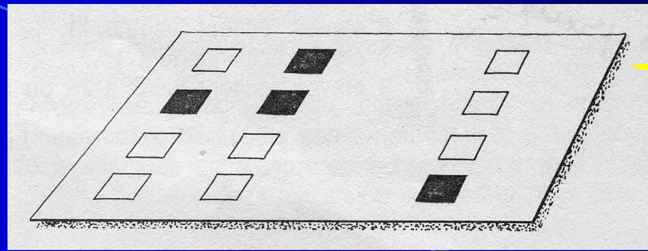
Consigne: « il faut aller chercher juste ce qu'il faut de jetons, au retour il doit y avoir un jeton dans chaque gobelet et pas de gobelet vide… »

Les variables de la situation: (la situation se propose en PS, MS, GS, CP)

- ➡ Le nombre de gobelets (ce nombre est à adapter en fonction des capacités des élèves (var. pédagogique), mais également pour faire évoluer les procédures (var. didactique): collections-témoins, puis nombres).
- ➡ Le nombre d'allers et retours (3, puis 2, puis 1).
- ➡ La distance spatiale et temporelle entre les deux collections.
- ➡ L'organisation et le choix du matériel (gobelets, quadrillage en robot, grappes de raisin, wagons de voyageurs, coccinelles, etc…).
- ➡ Le type de communication (élève seul, un banquier, par oral, par écrit)…

Exemples de différents supports:

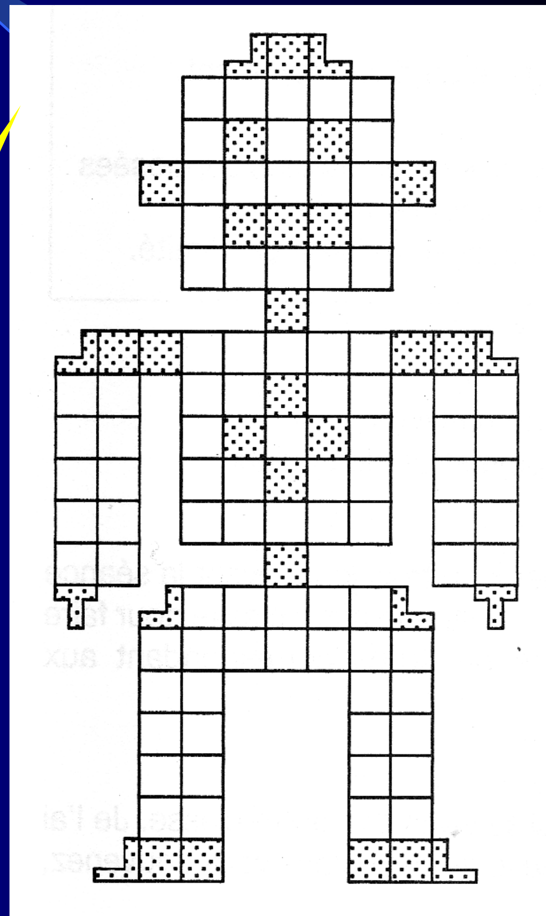




Pour la G.S

Une coccinelle pour la M.S. et la P.S.

Pour le C.P.



3ème partie: Exposé des grandes connaissances ou compétences concernant les prémices de l'apprentissage du nombre (Cycle 1, GS, 1/3 CP).

- ➔ **La chaîne orale**: la suite des mots-nombres.
- ➔ **Le comptage-dénombrement**: la réponse à la question « combien? ». Les différents principes..
- ➔ **Les collections-témoins**: les doigts et les autres…
- ➔ **La reconnaissance globale** de certaines quantités..
- ➔ **La structuration des quantités**:**Le passage de la logique du comptage à la logique du calcul**: quand? Comment?…
- ➔ **<u>Le comptage comme obstacle au calcul</u>**…
- ➔ **<u>La chaîne écrite</u>**: la suite écrite des nombres.

Les compétences concernant le cycle 1 et 2 (GS) :

DES QUANTITÉS ET AUX NOMBRES ; Être capable de :

C1 - Comparer des quantités en utilisant des procédures non numériques ou numériques ;

- C2 - Réaliser une collection qui comporte la même quantité d'objets qu'une autre collection (visible ou non, proche ou éloignée) en utilisant des procédures non numériques ou numériques, oralement ou avec l'aide de l'écrit ;
- C3 - Résoudre des problèmes portant sur les quantités (augmentation, diminution, réunion, distribution, partage) en utilisant les nombres connus, sans recourir aux opérations usuelles.
- C4 - Reconnaître globalement et exprimer de très petites quantités (de un à trois ou quatre) ;
- C5 - Reconnaître globalement et exprimer des petites quantités organisées en configurations connues (doigts de la main, constellations du dé) ;
- C6 - Connaître la comptine numérique orale au moins jusqu'à trente ;
- C7 - Dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ;
- C8 - Associer le nom des nombres connus avec leur écriture chiffrée en se référant à une bande numérique.

➔La chaîne orale: les codes oraux

[un], [deux], [trois], [quatre], [cinq], [six], … etc

suivant

- **il y a la suite en chapelet : tous les mots sont attachés (**l’enfant récite sans pouvoir « sectionner »),
- **la suite non-sécable : les mots sont distincts, l’élève peut « repartir » si l’adulte lui fournit une « amorce »,**
- **la suite sécable : les mots sont distincts et l’enfant est capable de partir d’un mot différent de [un], seul.**

La suite peut ne pas être stable…

Le manque de régularité dans la suite des mots implique des difficultés d’apprentissage (*les japonais ont moins de difficulté***).**

C’est une connaissance langagière,

<u>Le comptage-dénombrement</u>: c'est l'association de la récitation de la C.O. et du pointage du doigt, afin de désigner une quantité par un mot-nombre.

Les 4 principes:

P1 (Pss(n)): C'est le principe de suite stable, c'est avoir acquis une récitation stable et conventionnelle de la C.O..

P2 (Pbi(n)): Le principe de bijection, c'est avoir acquis l'association convenable du mot et du pointage du doigt, et le mot consécutif avec un objet non encore pointé.

P3 (Pca(n)): C'est le principe cardinal, c'est associer le dernier mot-nombre prononcé à la quantité.

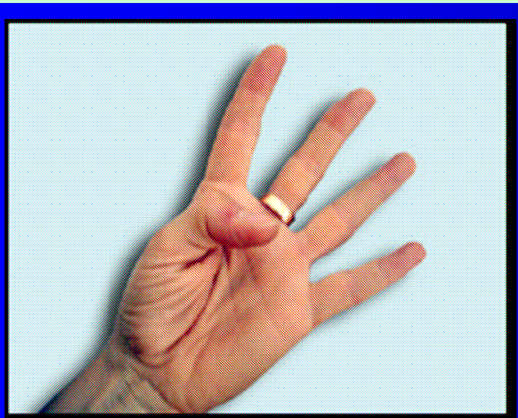
P4 (Poq(n)): Le principe d'ordre quelconque, c'est affirmer que le mot-nombre prononcé ne dépend pas de l'ordre de pointage…

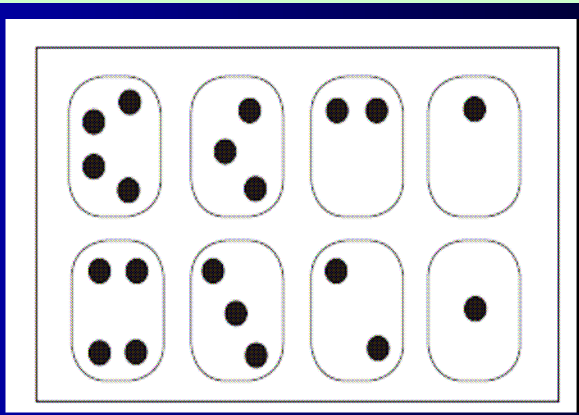
Les collections-témoins:

Ce sont des collections particulières qui permettent de communiquer des quantités (d'une manière analogique), la communication étant non-verbale.

Exemples : les doigts, les points d'un dès, des collections de points,… etc..

Cette pratique est importante et semble, chez l'enfant, être relativement précoce *(« je veux ça de bonbons »*, dit-il en montrant 3 doigts).





Les cinq frères
(comptine de tradition orale)

Ils étaient 5
dans un
grand lit

(en s'aidant de l'autre main)

et le tout petit
pousse ses frères
pousse ses frères

et le pouce
est tombé

Ils étaient 4
dans le
grand lit

et le tout petit
pousse ses frères
pousse ses frères

et l'index
est tombé...

...ils étaient 2
dans le
grand lit

(en s'aidant de l'autre main)

et le tout petit
pousse son frère
pousse son frère

et l'annulaire
est tombé

et le tout petit se dit
qu'on est bien tout seul
dans le grand lit

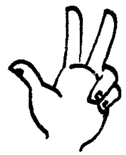
Les lapins copains

1 petit lapin
sur le chemin
rencontre...

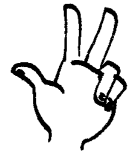
...un autre petit
lapin

2 petits lapins
sont devenus
copains

2 petits lapins
sur le chemin
rencontrent...



...un autre petit
lapin



3 petits lapins
sont devenus
copains...

4 petits lapins
sur le chemin
rencontrent...

...un autre petit
lapin

J'ai 5 doigts
sur ma main
pour compter
les petits lapins

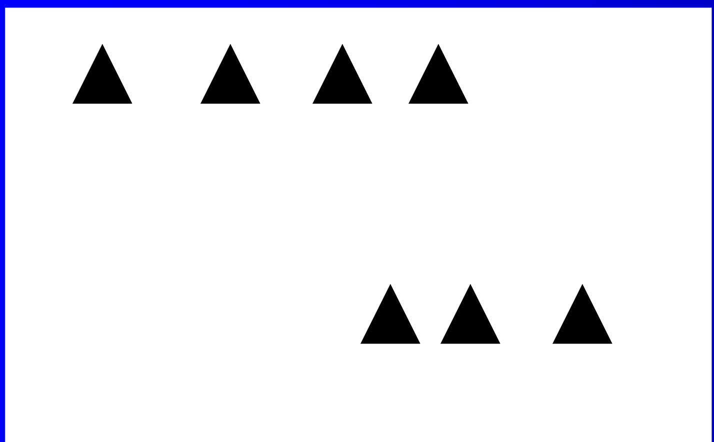
La reconnaissance globale des quantités :

- C’est associer une quantité à un mot-nombre, sans utiliser explicitement le comptage-dénombrement.
- C’est possible pour une quantité allant jusqu’à 3 ou 4…
- C’est une liaison : Quantité ⇔ Oral, mais elle peut se faire avec des collections-témoins.

La structuration des quantités :

C’est, au-delà de 3 ou 4, décomposer la collection en sous-collections, les associer à des mots-nombres, et activer un mot-nombre en mémoire à long terme (M.L.T.) qui correspond à la quantité globale.

C’est le passage de la logique du comptage à la logique du calcul….



Quand le carton est montré suffisamment vite, l’élève doit dire: « j’ai vu 4 et 3 ».
Et l’enseignant d’ajouter: « Oui, c’est bien, tu as vu aussi 7 »

Les trois intervalles sur lesquels opère la « pensée du nombre » d'une manière différente :

L'intervalle des petits nombres : $I_1 = [1, p]$, p valant 3 ou 4.

Sur cet intervalle, la reconnaissance globale doit se mettre en place rapidement.

L'intervalle des nombres familiers : $I_2 = [p, n]$, n valant 4 ou 5, puis 5 ou 6, puis 6 ou 7, puis 7 ou 8, puis … etc…..

Sur cet intervalle, la logique du calcul doit prendre la place de la logique du comptage, n devient de plus en plus grand….

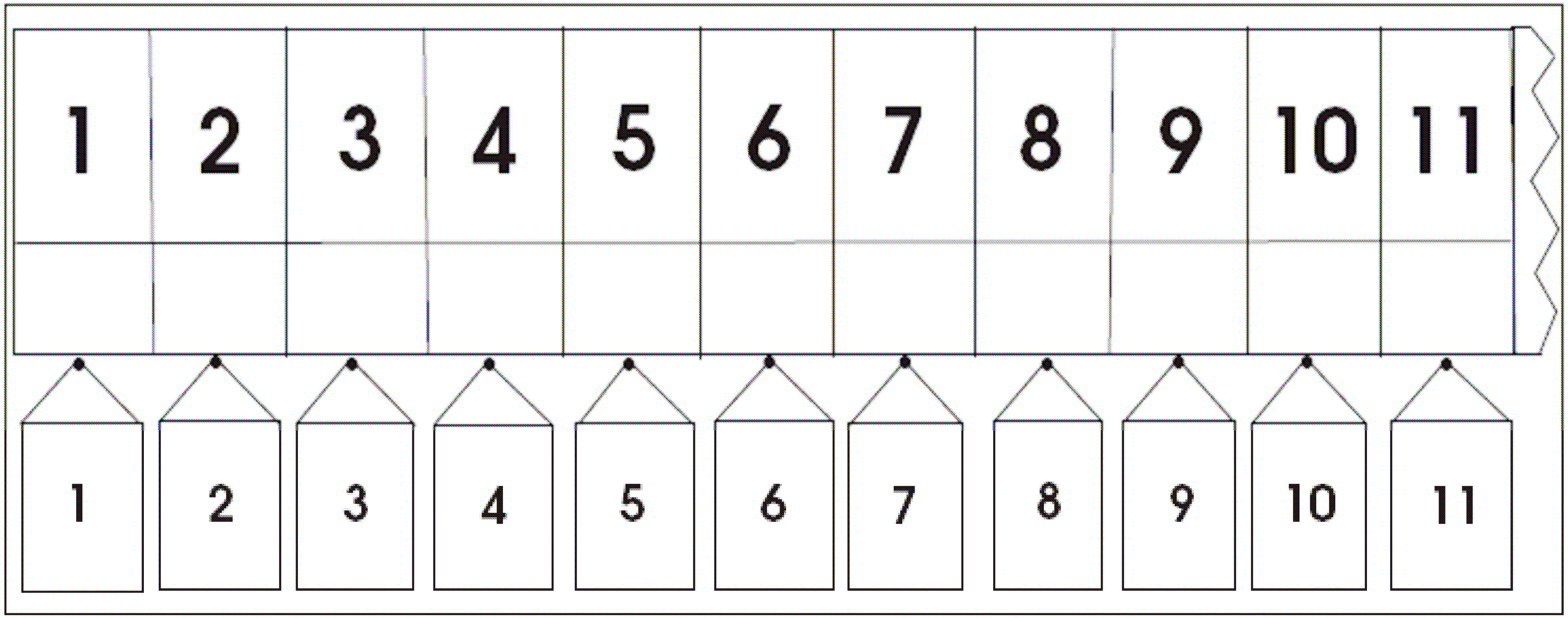
L'intervalle des grands nombres : $I_3 = [n, \rightarrow[$.

Sur cet intervalle, le comptage est prépondérant, il permet d'accéder à la quantité avec une fiabilité de plus en plus sûre. **I2 doit prendre la place de I3.**

Sur cet intervalle, le comptage est un accélérateur d'apprentissage…

Le passage à l'écriture chiffrée:

La chaîne écrite: c'est la suite écrite des nombres, les codes écrits: .1, 2, 3, ………9, 10, 11,……20, 21… etc?, Cette suite est , « concrétisée » par la « bande numérique » Exemple (début en M.S., puis systématisée en G.S.):



La B.N doit être à la disposition des élèves, et utilisée dans des situations de communication (émetteur / récepteur)….

Des tableaux de nombres (CP):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

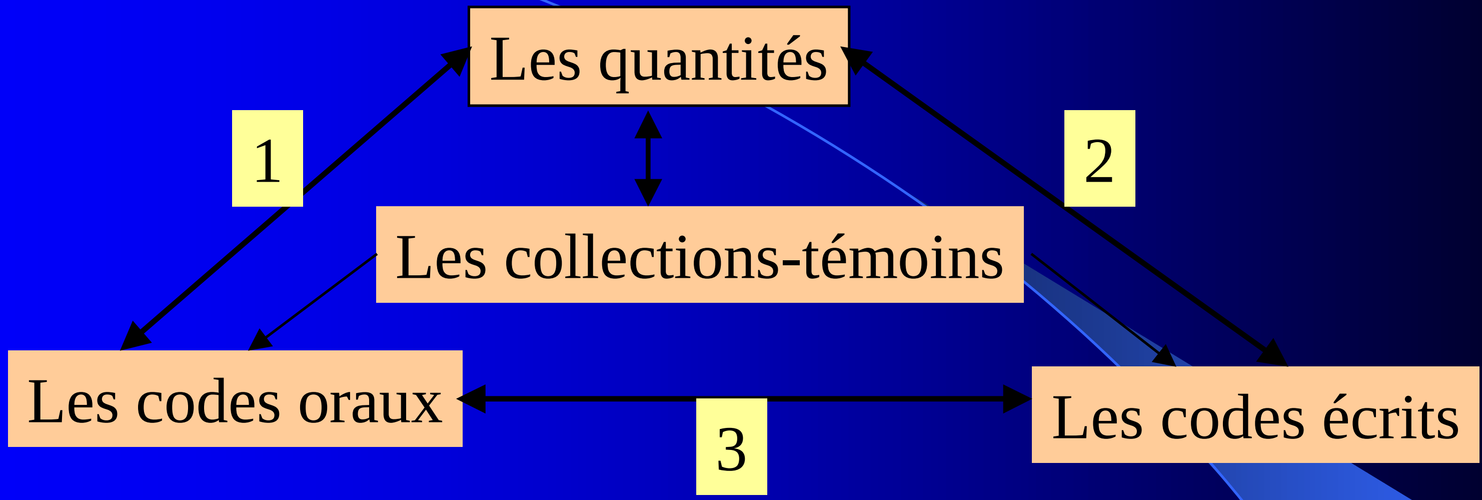
Exemple d'utilisation:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12		14	15		17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27		29
30	31	32	33		35	36	37	38	
40		42	43	44		46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	
70	71		73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83		85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10									
20									
30									
40									
50									
60									
70									
80									
90									

Construire les familles de nombres (début CP):
« Je suis dans la famille des cinquante, je me termine par quatre, je suis? »
Réponse: « cinq , quatre » (écrit par oral),
Ou: « cinquante quatre » (oral par oral),
Ou : 5 4 avec 2 étiquettes-chiffres (écrit par écrit).

Le triangle fondamental:



➔Toute « hypertrophie » d’un sommet au détriment des deux autres, crée des obstacles dans les apprentissages.

➔ Ce sont les interactions entre les sommets qui sont sources d’apprentissage, exemple:

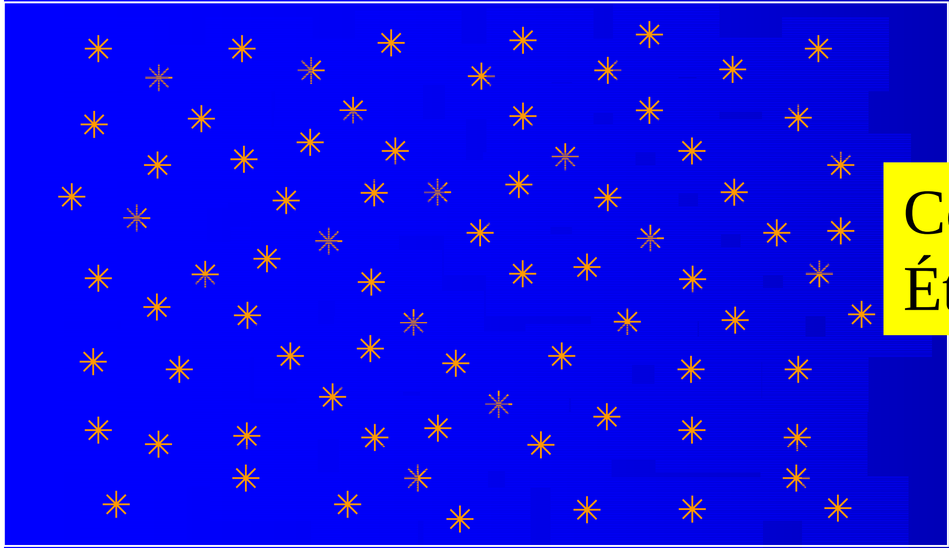
- La flèche 2: elle impose de mettre en correspondance systématiquement les codes écrits et la quantités qu’ils sont censés représenter.
- La flèche 3: le lien entre les codes oraux et codes écrits est complexe (pourquoi certains élèves: trente et un → 301)

4ème partie:

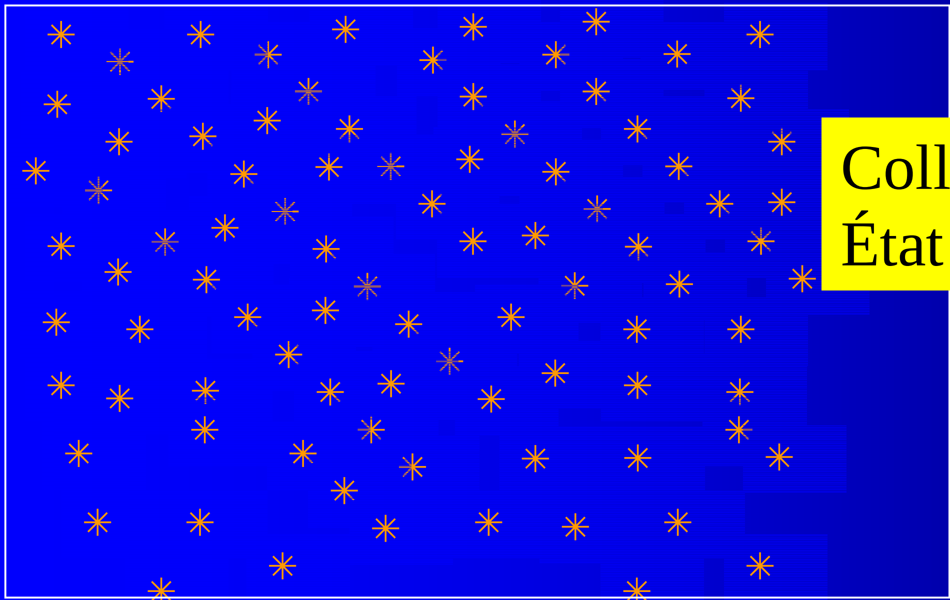
Les points clefs de l'apprentissage du système de numération, difficultés et obstacles …

Préambule mathématiques:

Problème: comment comparer deux très grandes quantités?



Collection A
État initial.



Collection B
État initial.

Réponses:

1) Avec la correspondance terme à terme.

Mais elle est fastidieuse et ne permet pas de communiquer.

2) Avec le comptage dénombrement .

Mais la mémoire est vite saturée…

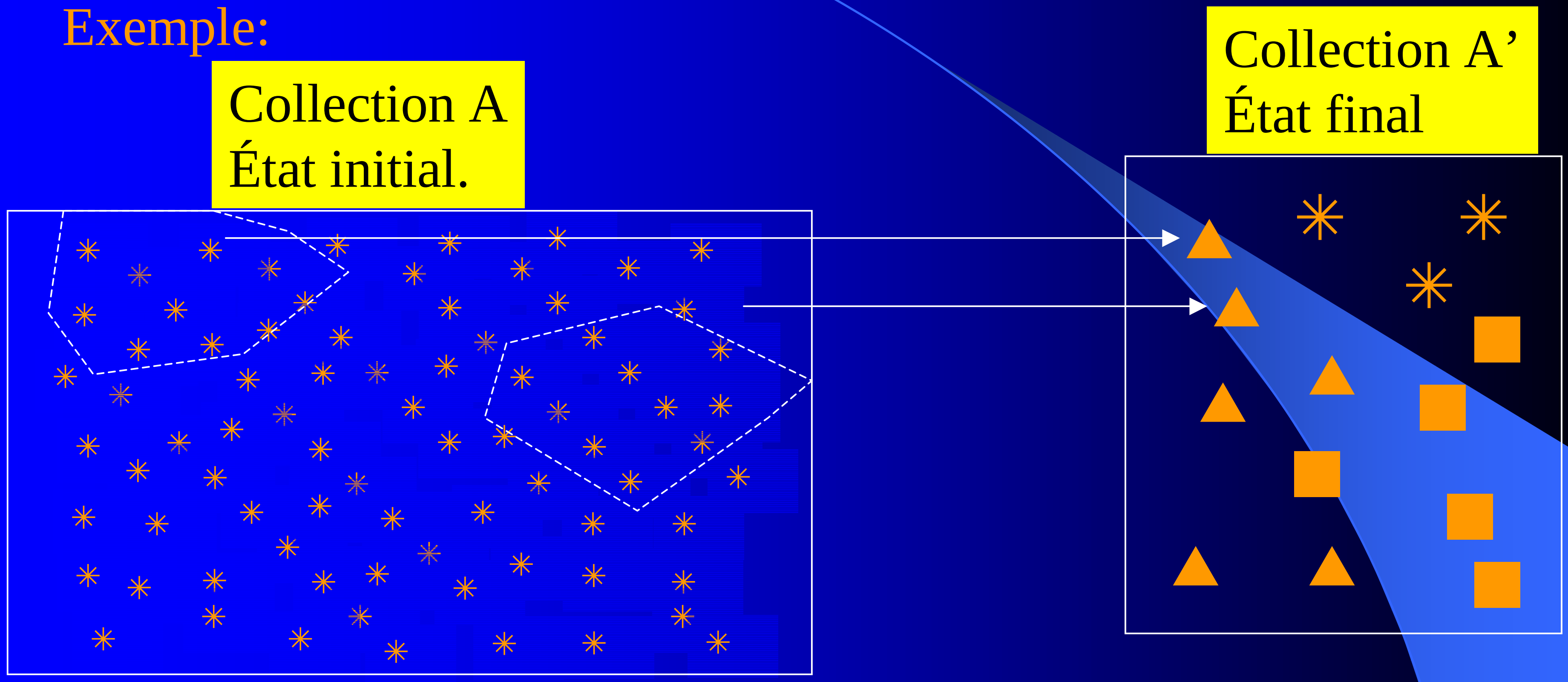
3) En « raréfiant » la collection…

C’est-à-dire:

En faisant des groupements,
Puis des échanges contre des
objets différents.
Exemple:

10 ✳ → 1 ▲

10 ▲ → 1 ■



Puis on code la collection A’:

Ainsi d’abord: 6 ▲ 5 ■ 3 ✳

Puis en faisant disparaître la matériel: 563

Faire bien attention qu’ici un ordre sur les écrits est nécessaire….

Quelles connaissances et/ou compétences doivent acquérir les élèves pour:

- ➔ Maîtriser ces différentes étapes,
- ➔ S'en servir (ou les ré-investir) dans différents problèmes nécessitant les règles de la numération; les techniques opératoires.
- ➔ Les transférer vers des savoirs différents, mais connexes (exemple: les nombres décimaux)…

Il est à signaler que:

➨ 95% des élèves du cycle 3 savent que le 5 de 256 est le chiffre des dizaines.

Ce qui est relativement inutile…

Mais:

➨ Seulement 40% savent combien on peut faire de dizaines avec 256, rien qu'en observant l'écriture du nombre.

Ce qui est fondamental, ne serait ce que pour la technique de la division…

Il y a 11 connaissances et/ou compétences. Elles sont complexes et demandent du temps …

C1: Toutes celles correspondant à la Partie 1….

Domaine scolaire: Maternelle (PS, MS, GS) et 1er tiers CP.

C2: Cerner une loi algorithmique sur la suite des écritures chiffrées (codes écrits). C'est-à-dire:

- ➜ Comprendre que dans une écriture à 2 chiffres, le chiffre de droite n'a pas le même statut que le chiffre de gauche.
- ➜ Que, donc, le nombre 10 n'est pas un nombre comme les autres, il « structure » la suite des codes écrits.
- ➜ Que les nombres peuvent être rangés selon des familles « famille des quarante… etc.».
- ➜ Que, dans les calculs, les appuis à 10 sont efficaces (8+4 c'est pareil que 10+2)…

Domaine scolaire: fin de GS et 1ère moitié de CP)

C3: Comprendre qu'il est nécessaire de grouper pour mieux dénombrer.

Ce doit être la rupture définitive avec le comptage.

Voir exemple, comme quoi cette prise de conscience ne va pas de soi….

C4: Considérer un groupement comme « 1 » et faire fi de la quantité qui compose le groupement.

C5: Comprendre ce que sont les échanges, les réaliser, s'en souvenir, les répéter…Les mettre en oeuvre pour résoudre un problème.

Domaine scolaire: 2ème et 3ème tiers du CP, CE1, CE2

C6: Prendre conscience, à la suite des groupements et des échanges, de la différence entre « VALEUR et QUANTITE ».

C7: De percevoir « dix » comme « 1 dizaine ». *C'est une conséquence de la connaissance C4 sur le paquet de dix.*

C8: Pourvoir comparer les quantités initiales (*avant transformation, c'est-à-dire avant l'échange*) à partir des quantités finales (*après la transformation*).

C9: Que l'encodage rend nécessaire une convention d'ordre sur les objets de l'état final (*disparition du « réel », passage obligé au code*)…

C10: Que l’encodage et le décodage sont possibles et mutuellement nécessaires pour donner du sens aux règles sur les écrits :

Codes écrits ← encodages ← Quantités

Codes écrits → décodage → Quantités

Ce processus correspondra, au Cycle 3, au suivant :

1563 → 156 diz et 3 unités,

ou : 15 cent et 63 unités,

ou : 1 millier et 56 diz et 3 unités

ou : 1 millier et 5 cent et 6 diz et 3 unités

- **C11** : Que les règles sur les écrits permettent de mettre au point des procédures efficaces concernant le calcul.
- « 30 + 20 c'est 3 diz + 2 diz, c'est 5 diz,
- et « 5 diz » ça s'écrit 50 »,
- et non: « 5 et j'ajoute un zéro »…

$$
\begin{aligned}
28 + 34 &= 10 + 10 + 8 + 10 + 10 + 10 + 4 \\
&= 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + \underbrace{8 + 4}_{10 + 2} \\
&= 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + \mathbf{10} + 2 \\
&= 60 + 2 = 62
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cr|r}
 & {}^{1}\,2 & 8 \\
+ & 3 & 4 \\
\hline
 & 6 & 2
\end{array}
$$

Attention: pas de disposition en colonne au CP… Pourquoi?

Le matériel nécessaire:
Lequel? Dans quelles situations?

Matériel :	**Ce qu'il apporte dans l'apprentissage :**	**Ce qu'il occulte dans l'apprentissage :**	**Observations :**
L'abaque :	L'échange 10 → 1, L'action quantitative dans l'échange, Une représentation sym-bolique du quantitatif, La **différence entre valeur et quantité** (la valeur d'un jeton est fonction de la position de la barre)..	L'écriture chiffrée. L'ordre conventionnel dans l'écriture est prédéterminé (*sauf un possible déplacement des jetons vers la gauche et inversion de l'abaque*).	A introduire au CP, ou dans des actions de remédiation.
Le compteur	La représentation chiffrée. Le statut différent des chiffres. Les représentations symboliques des opérateurs: +10, +100, +1000...etc	L'échange 10 → 1 L'ordre conventionnel dans les écrits (*prédéterminé par l'emplacement des roulettes*). Les calculs efficaces.	Outil à utiliser dans des situations particulières (mémorisation, en début de CP de dénombre-ments)

Les maisons à construire:	La notion de règle d'échange, la nécessité de s'en souvenir et de la faire fonctionner. La nécessité de prendre un groupe comme une unité de nature différente.	Tout le reste: pas de passage à l'écrit, pas de rapport au quantitatif...etc. *Mais ce n'est pas grave, car ce matériel est utilisé que pour faire fonctionner les échanges, et exclusivement ceux-ci*…	La situation correspondante (ERMEL, page 306) doit être fortement structurée, afin de faciliter un transfert vers les connaissances ultérieures...
La monnaie:	Le groupement et l'échange 10 → 1, La **différence entre valeur et quantité**.. Si passage à l'écrit: ordre conventionnel des chiffres (il est particulièrement bien favorisé).	Après l'échange, la valeur du groupement reste visible, mais selon un aspect symbolique (et non plus quantitatif, comme pour le matériel de groupement, ci-dessous).	La décontextualisation est difficile. *En effet, dans l'utilisation de la monnaie et de l'argent, l'objectif peut être dévoyée rapidement* …

Les matériels hétérogènes (jetons de différentes formes).	Le groupement et l’échange 5 → 1 ou 10 → 1, L'action quantitative dans l'échange, Une représentation du quantitatif, La **différence entre valeur et quantité**. Affichage d'une unité de nature différente, après l'échange. Si passage à l'écrit (10 → 1): ordre conventionnel des chiffres.	Une représentation radicalement différente de la quantité (problème de la visualisation de l'état final par rapport à l'état initial).	Attention: Le passage à l'écrit est formellement déconseillé pour les échanges autres que10 → 1 (*il s’agit, ici, de comprendre les erreurs de la réforme de 1970*).
La matériel de groupement: (enveloppes **opaques** de différentes grandeurs).	Le groupement par 10 et la visualisation du groupement. L’échange 10 → 1 par la disparition du groupement dans l’enveloppe. L'action quantitative dans l'échange, La **différence entre valeur et quantité**.	La quantité 10 est toujours « ressentie » dans l’enveloppe, même si elle n’est plus visible (*mais ce peut être une qualité pour un intermédiaire avec le matériel hétérogène*).	Utilisé dans la situation « les Fourmillions » (*voir ERMEL CP, page 319*). D’autres matériels de ce type sont proposés dans *ERMEL CE1, p. 322*.

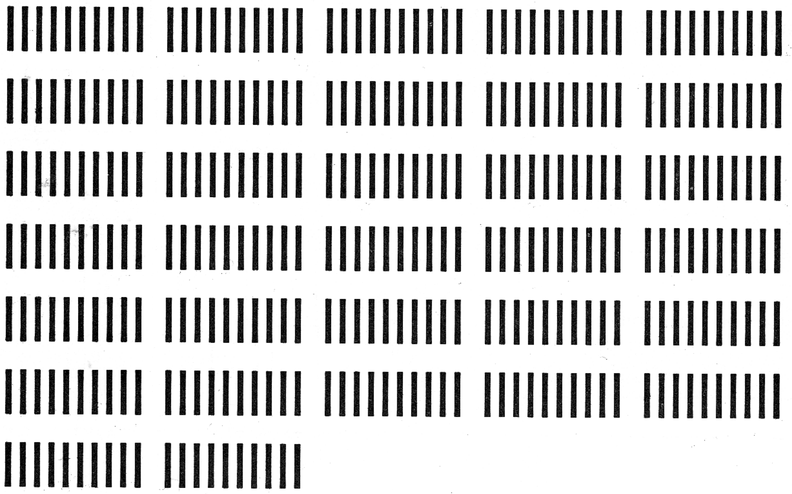
La matériel de groupement: enveloppe **transparente**, matériel multi-base, etc.	Le groupement par 10 et la visualisation du groupement.. L'action quantitative dans l'échange.	Pas d'affichage d'une unité de nature différente, après l'échange (car la quantité 10 reste en place et est toujours visible). Donc ne favorise pas la différence entre valeur et quantité...	Les problèmes sont plus au niveau de l'utilisation que dans le matériel lui-même... (Il peut être utilisé mais seulement comme intermédiaire).
La calculatrice	La représentation chiffrée. Les calculs efficaces. Les représentations symboliques des opérateurs: +10, +100, +1000...etc.	L'échange 10 → 1, L'ordre conventionnel dans les écrits (peut être utile dans la partie I-2, car le statut différent des chiffres apparaît à la frappe).	Outil à utiliser couramment, mais dans des situations bien ciblées (contrat parfaitement explicité).

Exercices, évaluation, accompagnement:

Exercice 1 : Les traits

Trouve un moyen pour compter vite le nombre de traits.

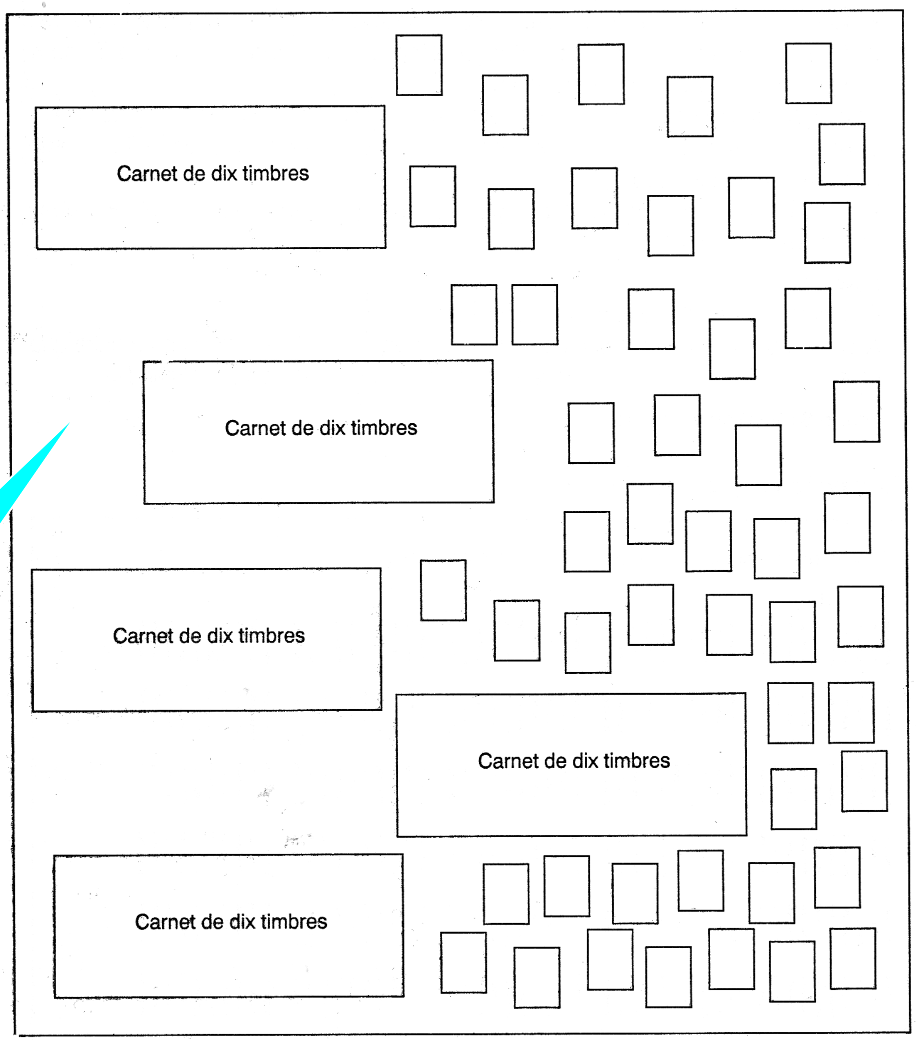
10 10 10



Combien y a-t-il de traits ? ....

Exercice 2 : Les timbres

On veut envoyer 37 lettres.
Tu as au bas de cette feuille des carnets de 10 timbres et des timbres seuls.
Tu dois découper juste ce qu'il faut de timbres pour expédier toutes les lettres, mais tu dois faire très vite.
Colle ce que tu auras découpé sur une feuille blanche.

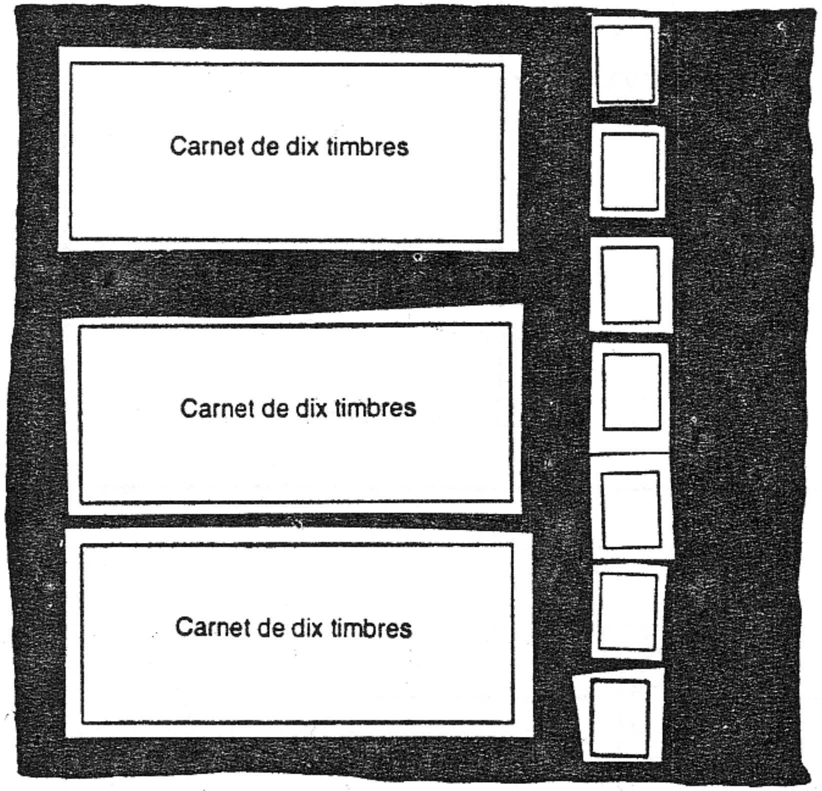


Pour dénombrer rapidement

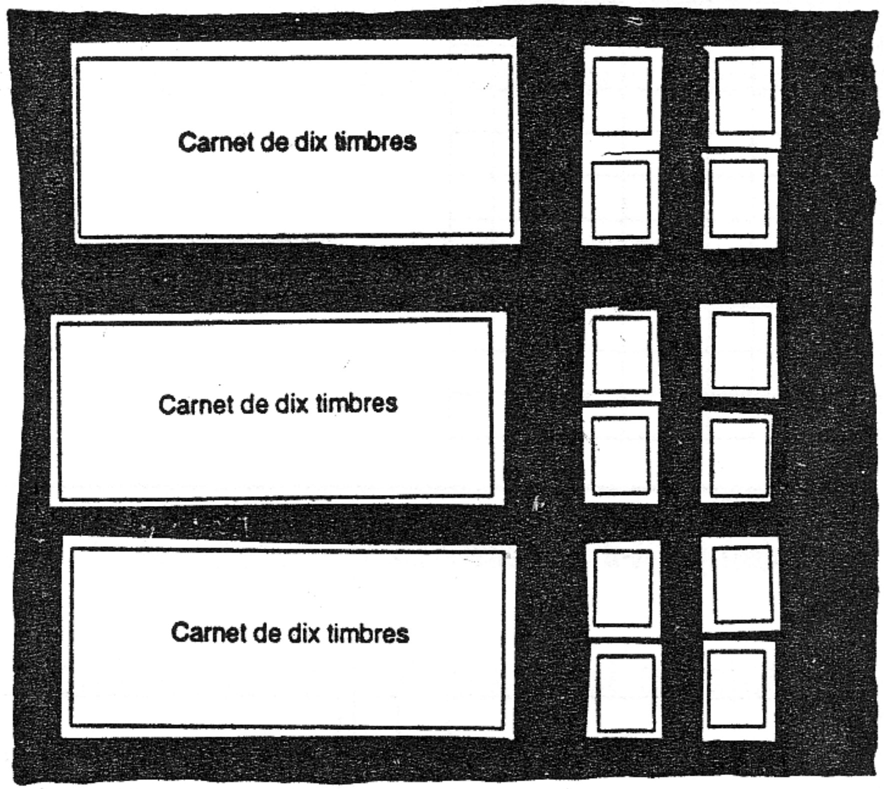
Pour « voir » si le paquet de dix est opérationnel.

Exemples de collages dans une classe

Collage juste

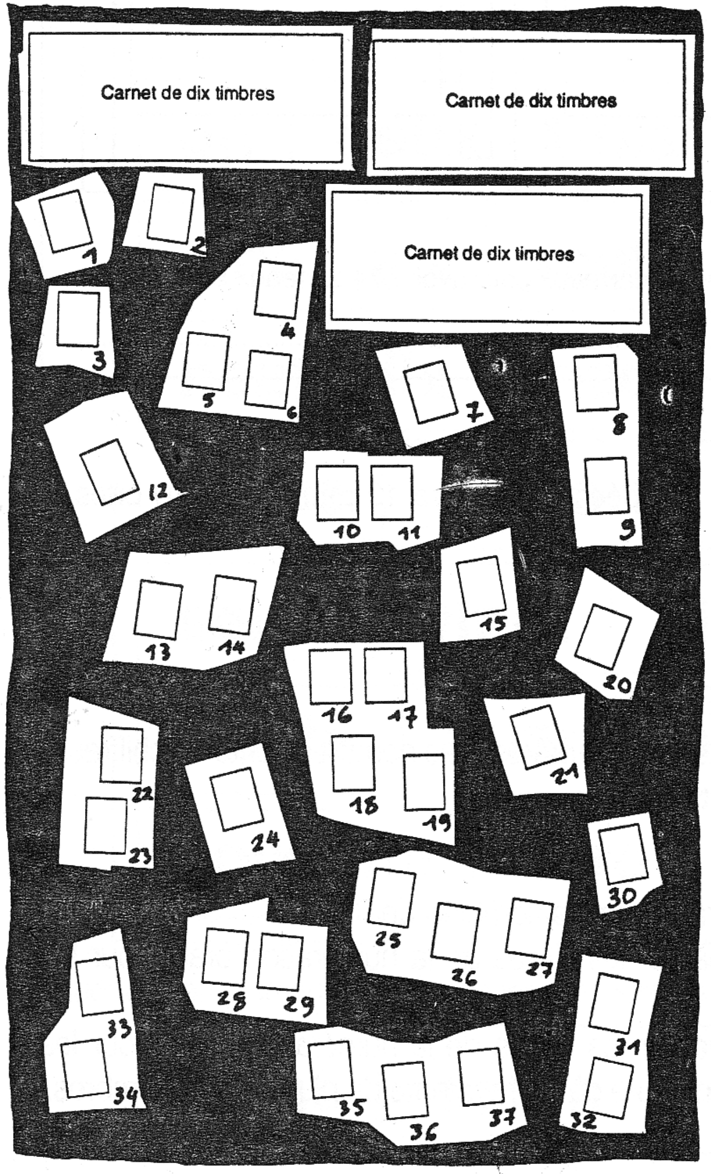


- 1er type d'erreur



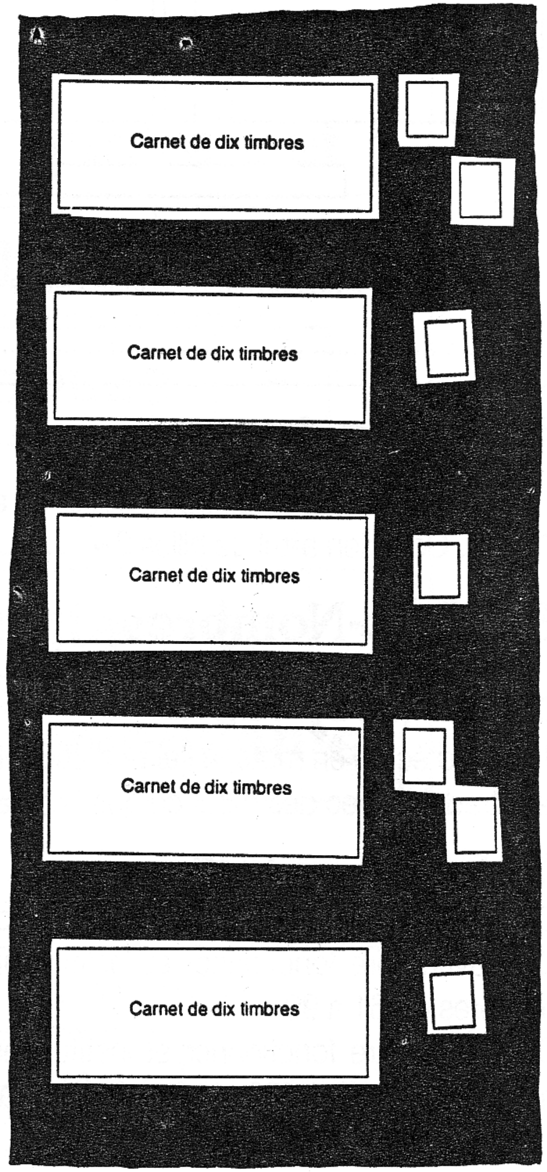
12 timbres isolés

• 2e type d'erreur



3 carnets et 37 timbres isolés

• 3e type d'erreur

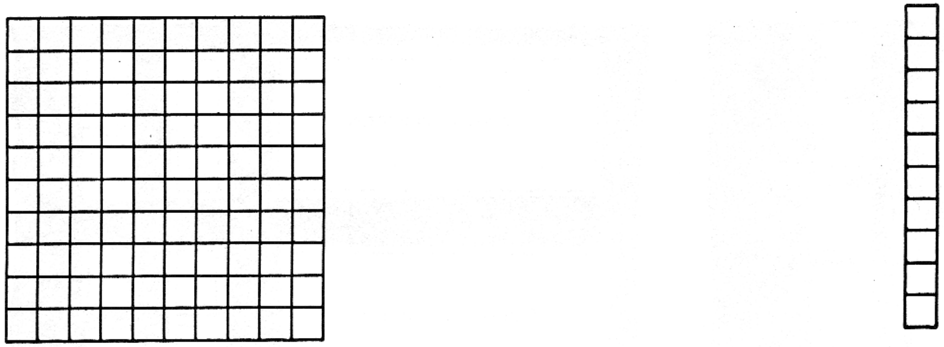


5 carnets et 7 timbres isolés

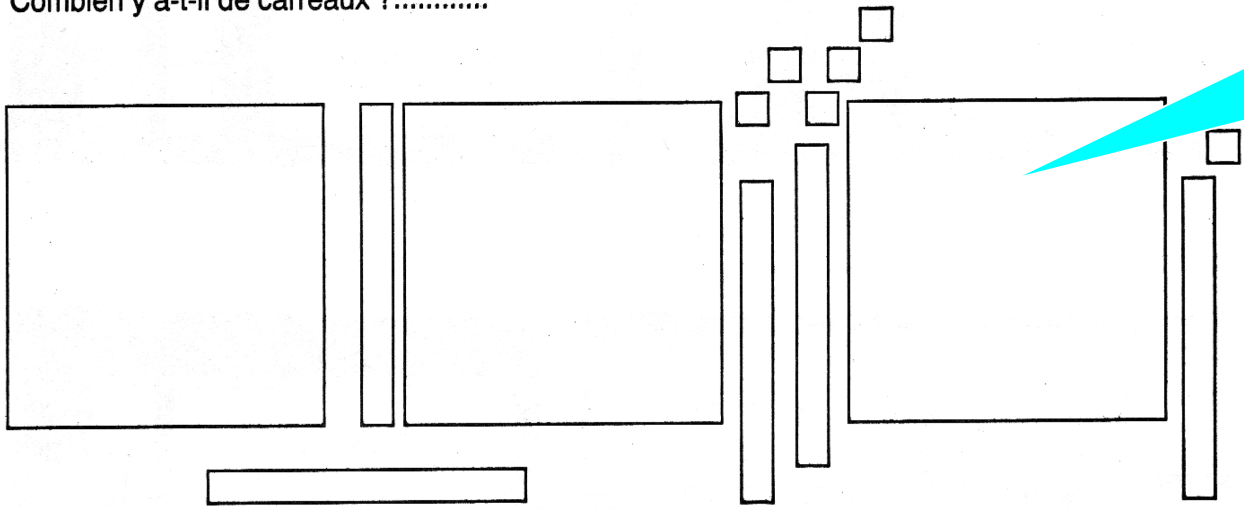
Exercice 3 : Les carreaux

Les carrés contiennent 100 carreaux.

Les bandes contiennent 10 carreaux.



Combien y a-t-il de carreaux ?............



Combien faut-il de carrés, de bandes et de petits carreaux pour avoir 574 carreaux en tout ?

....

L’enjeu est de cacher le paquet de dix.

5ème partie: la structure « additive et soustractive ».

- Les points clés qui rendent les problèmes « additifs et soustractifs » complexes.
- La technique de la soustraction, lien avec la résolution de problèmes.

Exemples de problèmes:

	Je transcris le problème.	Je résous le problème
1- Jean joue pendant la récréation et perd 23 billes, maintenant il en a 31. Combien en avait-il avant la récréation ?	? – 23 = 31	23 + 31 = ?
2- Jean a 54f, Paul a 31f. Jean a plus d'argent que Paul, oui !, mais combien a-t-il de plus ?	31 + ? = 54	54 – 31 = ?
3- Dans un vase il y a 24 roses et 31 marguerites, combien de fleurs dans le vase y-a-t'il ?	23 + 31 = ?	23 + 31 = ?
4- J'ai 55 billes, je joue et j'en perds 31, j'en ai combien maintenant ?	54 – 31 = ?	54 – 31 = ?
5- Je suis sur la case 54, je recule, je tombe sur la case 31. De combien j'ai reculé ?	54 - ? = 31	54 – 31 = ?

Les problèmes 3 et 4 sont relativement simples et peuvent être résolus par des élèves de GS ou CP (avec de petits nombres).
Les problèmes 1 et 5 sont particulièrement difficiles, même pour des élèves de CM2 (même avec des petits nombres).

Conclusion:

1) La difficulté d'un problème « additif ou soustractif » n'est pas complètement relative à l'opération nécessaire à sa résolution:

➔ Il existe des problèmes additifs bien plus complexes à résoudre que beaucoup de problèmes soustractifs.

2) La programmation de ces problèmes ne peut pas se baser sur les difficultés relatives à la technique opératoire .

➔ Il est vrai que la technique de la soustraction reste plus complexe que celle de l'addition.

➔ Mais, une autre programmation, basée sur une autre hiérarchie des difficultés, est nécessaire …

➔ Quelles sont les difficultés majeures?

➔ Quelle programmation entre les différentes classes?

Voici quelques exemples de difficultés rencontrées chez les élèves:

1) L'existence ou non des « mots inducteurs »: « plus que… », « moins que.. », « il reste », « il en a perdu, gagné »,.. Etc.

- L'existence de ces mots crée des obstacles au choix conscient de l'opération à mettre en œuvre.

2) La nature, plus ou moins confuse, de « l'habillage » du problème, du vocabulaire employé:

- Existe-t-il des problèmes sans « habillage », que l'on peut proposer aux élèves des Cycles 1 et 2?
- La réponse est affirmative, et l'on doit les proposer.
- Exemple: « La boîte jaune ».
- Ces problèmes à « consigne orale » s'appuient sur un dispositif matériel adéquat qui :
  - Favorise la compréhension de l'énigme à résoudre,
  - Permet l'anticipation et force les opérations mentales,
  - Permet la validation par retour au support matériel de référence.

3) Les relations mathématiques entre les données numériques:

4 types de relations sont à l'œuvre dans les problèmes:

Type 1: Transformation d'états:

Type 2: Composition d'états:

Type 3: Comparaison d'états:

Type 4: Composition de transformations:

➔ Les problèmes de type 1 sont (parfois) plus faciles que ceux de type 2 et surtout de type 3.

➔ **Programmation** (succincte):

Type 1: GS, CP, CE1, CE2, CM1, en jouant sur la grandeur des nombres et les aides (« boite jaune », schéma, déplacements sur BN).

Type 2: Idem, mais en décalant la variation sur les nombres.

Type 3: pas avant le CE2 → CM1 et CM2 et $6^{\text{ème}}$.

Type 4: Pas avant le CM1 ou CM2 → $6^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$.. .

➔ Donnons quelques exemples:

Type 1:

Schéma: $E_i \xrightarrow{T^{+/-}} E_f$

Symbole: E_i $T^{+/-}$ E_f ; l'inconnue pouvant être soit E_i , soit $T^{+/-}$, soit E_f.

Exemples:

1) J'ai des billes le matin, j'en perd 10 le matin, le soir j'en ai 15. Combien j'en avais le matin?.
2) Il y a des jetons dans la boîte, j'en retire, regardez 10!, maintenant j'affirme qu'il y en a 15 dans la boîte. Combien en avait-il au départ?

- Ces deux problèmes relèvent de « E_i t^- e_f », et de l'addition,
- Mais le 2 est plus facile (en raison de la référence).

3) J'ai 25 f dans mon porte-monnaie, je gagne de l'argent, maintenant j'ai 35f. Combien j'ai gagné? (« e_i T^- e_f »)
4) Je suis sur la case 35, je recule de 10 cases. Où suis-je? (« e_i t^- E_f »).
   - Les 2 problèmes relèvent de la soustraction,
   - Mais, ils peuvent être proposés avant le 1) et le 2)

Type 2:

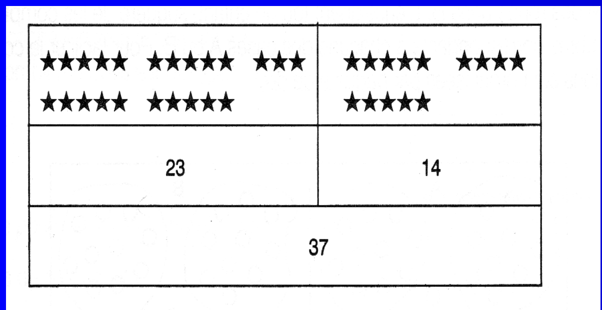
Schéma:

$$\left.\begin{matrix} E1 \\ \\ E2 \end{matrix}\right\} E$$

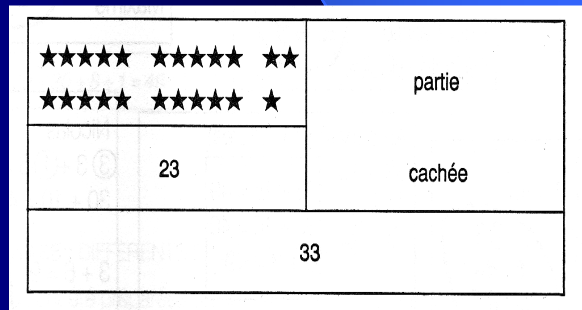
Symbole: E1 E2 E.

Exemples:

1) Il y a 15 roses et 10 marguerites dans un vase, combien il y a de fleurs dans ce vase?
2) Problème sans « habillage » (CP, CE1):



Exemple d'une partie cachée :



- **Une carte comme celle représentée à droite est utilisée. Mais, une partie est couverte, il s'agit de deviner ce qui est caché ?…**

<u>Type 3</u>: $\left.\begin{array}{l}E1\\ \\ E2\end{array}\right\} C^{+/-}$

Schéma:

Symbole : $E_1\ C^{+/-}\ E_2$

Exemples:

1) Jean a 15 billes et Paul en a 10 de plus, combien en a Paul?
2) Jean a 25 billes et Paul en a 15. Jean en a plus, mais combien en a-t-il en plus?

Le problème comporte le mot inducteur « en plus », et pourtant c'est une soustraction qui convient…

Pour répondre correctement il faut intégrer (mentalement) que les billes de Paul font partie intégrante de celles de Jean…

➔ Ce qui n'est pas évident pour le novice.

3) Paul a parcouru 23 km, mais il a parcouru 31 km de moins que Pierre. Combien Pierre a parcouru de km?.

C'est une addition qui est nécessaire… Et pourtant ce problème est difficile!

Type 4:

Schéma:

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, "T_1^{+/-}"] \arrow[rr, bend right, "T^{+/-}"'] & E_{int} \arrow[r, "T_2^{+/-}"] & E_f \end{tikzcd}$$

Symbole: $T_1^{+/-}T_2^{+/-}T$

Ces problèmes sont les plus difficiles!…

Car ils correspondent à des transformations, à leurs compositions,

Et on ne sait rien sur les quantités (initiales, intermédiaires, finales).

Exemples:

1) Paul à joué aux billes pendant les récréations, au total il a perdu 23 billes, le matin il en avait perdu 54. Que s'est-il passé l'AM?

Ce problème est très difficile: c'est un soustraction et il a gagné 54-23!

2) Paul joue au jeu de l'oie. Il fait 2 bonds, après ces 2 bonds il a avancé de 23 cases, mais au cours du 1er il avait reculé de 31 cases. Que s'est-il passé au cours de second?

C'est une addition (23 + 31), mais il est d'une extrême difficulté…

Sur la technique de la soustraction…

Les 3 techniques connues à ce jour :	**T1** **4** 1**2** 12 – 7 = 5 **-** 1**2** **7** 4 – 3 = 1 1 5	**T2** 3 ~~**4**~~ 1**2** 12 – 7 = 5 **-** **2** **7** 3 – 2 = 1 1 5	**T3** 1**2** **7** 7 + **.** = 12 **4** **2** **+** **1 5** 3 + **.** = 4 **-** 1**2** **7** **4** **2** **1 5**
Les savoirs et connais-sances en jeu :	➔ **La numération**, ➔ La disposition spatiale sur la feuille, ➔ Les différences partielles, **.** (a+x) – (b+x)=a - b	➔ **La numération** (et les échanges inverses), ➔ La disposition spatiale sur la feuille, ➔ Les différences partielles…	➔ **La numération**, ➔ La disposition spatiale sur la feuille, ➔ **La technique experte** (*plus ou moins*) de l'addition. ➔ Les « additions à trou » élémentaires.

42 – 27 = [42 + 10] – [27 + 10] = [(4x10) + (10 +2)] – [(2+1)x10 + 7]

= [(4x10) + 12] – [3x10 + 7]= [(4x10) – (3x10)] + [12 – 7] = [1x10 + 5]

= 15

Les problèmes qu'elle permet de résoudre « directe-ment »:	.	Tous les problèmes de type soustractif, associés aux écritures standards (a – b = ?) : $E_1\ e_2\ e$; $e_i\ t^-\ E_f$; $t_1{}^+t_2{}^-T$; etc...	Tous les problèmes de type soustractif, associés aux écritures lacunaires (? + b = a ou a + ? = b), $E_i\ t^+\ e_f$; $e_i\ T^+\ e_f$; $e_1C^+e_2$; etc.
Les problèmes qu'elle ne permet pas de résoudre « directe-ment »:	.	. Tous les problèmes qui nécessitent le passage d'une écriture lacunaire à une écriture standard (a + ? = b ➔ b – a = ? et d'autres).	. Tous les problèmes qui nécessitent le passage d'une écriture standard à une écriture lacunaires (b – a = ? ➔ a + ? = b et d'autres).

Donc le choix de la technique ne peut, en aucun cas, se faire par les types de problèmes qu'elle permet de résoudre simplement et directement.
Dans tous les cas, des apprentissages clés et difficiles doivent être mis en œuvre : les équivalences (qui ne vont pas de soi…).

Quelles équivalences?

b – a = ? ←→ a + ? = b
b – a = ? ←→ ? est « ce qui manque à a pour arriver à b »,
b – a = ? ←→ ? est « la différence entre b et a »,
b – a = ? ←→ ? est « l'écart entre b et a »

a + b = ? ←→ ? - a = b
a + b = ? ←→ ? est « ce qu'il faut ajouter à a pour obtenir b »,
a + b = ? ←→ quand on retranche a à ? on obtient b…

Pourquoi?

- Parce que certains problèmes ne se résolvent pas **directement** par une écriture standard,
  - ➔Par exemple: b – a = ? ou a + b = ?),
- Il faut passer par un intermédiaire ou une écriture intermédiaire,
  - ➔ ce que l'on appelle une écriture lacunaire,
  - ➔ Par exemple: a + ? = b ou ? - a = b
  - ➔ Par exemple: ce qui manque à a pour obtenir b….

Exemples:

Pb 1: Jean a 54 cubes dont 23 rouges. Combien a-t-il de cubes bleus ?

Problème de type 2 (composition d'état)

L'expert peut le résoudre directement par 54 – 23 = ?

Mais pour le novice, si la technique T3 a été privilégiée, il faut montrer que c'est équivalent à : « ? sont les cubes qu'il faut ajouter à 23 pour obtenir 54 ».

C'est-à-dire à : 23 + ? = 54

Pb 2: J'ai 23 objets dans cette boîte, j'en mets une poignée, j'ai maintenant 54 objets dans cette boîte. Combien j'ai mis d'objets dans la boîte?...

Problème de type 1 (transformation d'états)

Pour le novice, il se transforme naturellement par une écriture lacunaire: 23 + ? = 54.

Qu'il va falloir transformer en : 54 – 23 = ? (c'est-à-dire en une soustraction)…

FIN

Et bon courage!!