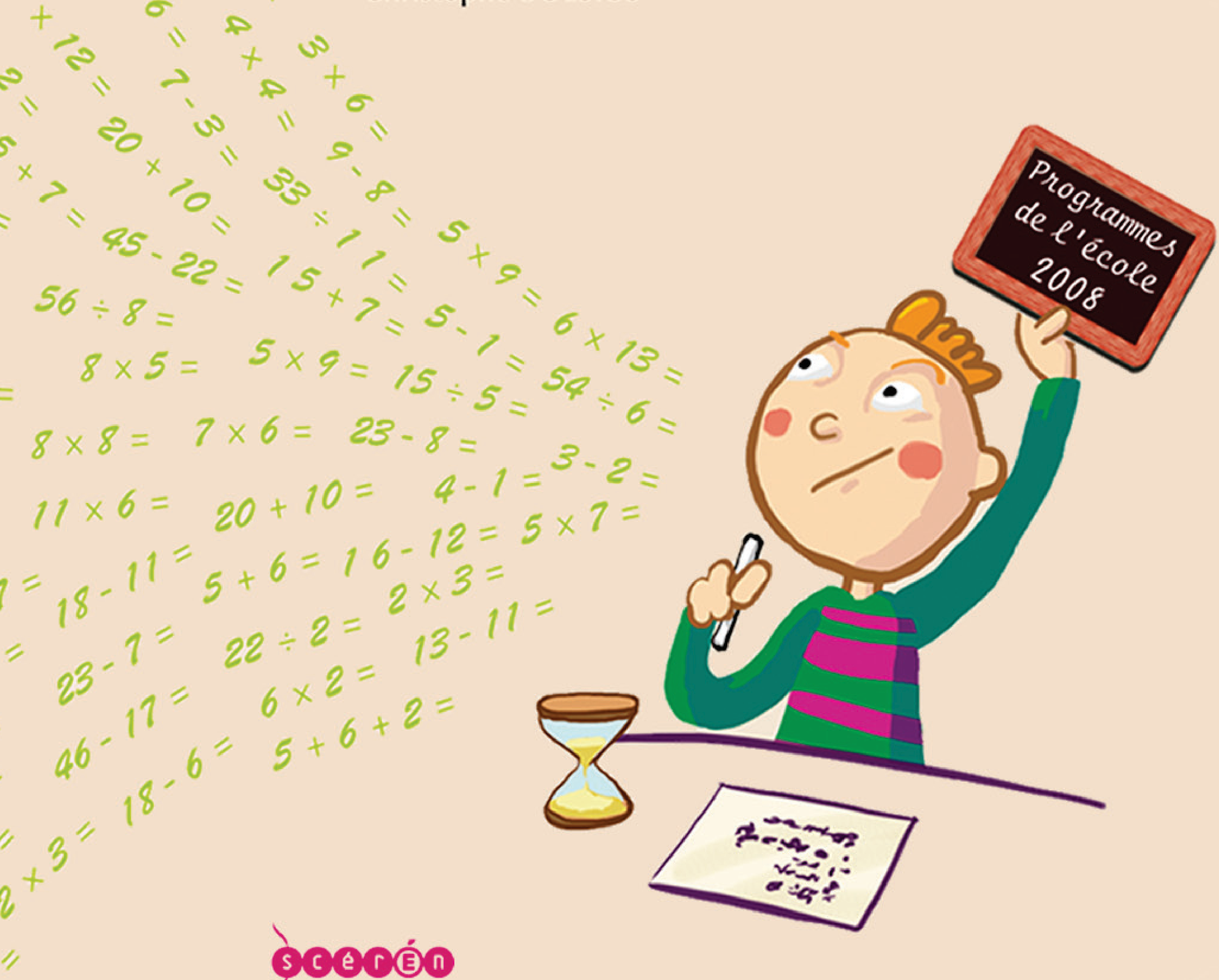
Fort en calcul mental !

Connaissances et stratégies pour réussir

Christophe BOLSIUS



scérén
CNDP-CRDP

Titre : Fort en calcul mental !

Sous-titre : Connaissances et stratégies pour réussir

Auteur : Christophe Bolsius

Préface : Jean - Louis Durpaire

Résumé : Ensemble d'outils et d'exercices pour préparer et programmer l'enseignement du calcul mental de la grande section de maternelle au CM2. Pour la numération et pour chacune des quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division), des pistes pédagogiques, une démarche d'apprentissage, une progression, classe par classe, sont proposées.

Coordination et suivi éditorial : Claire Stoquert

Maquette : Catherine Adnet et Stéphane Masset

Mise en pages : Stéphane Masset

Couverture : Laurent Le

Version dématérialisée : Myriam Meziani

ISBN : 2.86627.479.5

Dépôt légal : août 2011

CRDP de Lorraine
95 rue de Metz
CO 43320
54014 NANCY Cedex
http://www.crdp - lorraine.fr

Remerciements à Philippe Févotte, IA - IPR de mathématiques,
pour sa relecture attentive et ses conseils techniques avisés.

SOMMAIRE

PRÉFACE

Fort en calcul mental ! un titre qui traduit l'ambition de donner à chaque élève des compétences élevées en calcul.

Fort en calcul mental ! un ouvrage qui vient à point pour faciliter la mise en œuvre des nouvelles instructions et qui fournit des situations pédagogiques diversifiées pour entrer dans le monde du calcul.

Fort en calcul mental ! une proposition qui se situe parfaitement dans l'exigence posée par les nouveaux programmes de l'école primaire de « trouver un équilibre pédagogique entre les situations centrées sur l'exploration et la découverte et l'apprentissage structuré des automatismes ».

Pour savoir calculer mentalement avec aisance, il faut avoir mémorisé à la fois des « tables », c'est-à-dire des répertoires de résultats, et des structures ou des techniques qui permettent d'économiser le travail à effectuer. Mais posséder en mémoire ces deux ensembles d'outils ou d'appuis n'est pas suffisant pour bien calculer. Il faut aussi être capable de choisir rapidement entre plusieurs solutions possibles dans une situation donnée. Il est donc essentiel de développer l'agilité intellectuelle et pour cela de proposer des situations pédagogiques diversifiées.

L'apprentissage du calcul mental appelle à la fois rigueur méthodologique et imagination pour les propositions pédagogiques. La rigueur, c'est d'abord celle de la progression des apprentissages : le calcul mental commence tôt sur les premiers nombres connus et avec l'addition. Il s'étend au fur et à mesure de l'extension du champ des nombres connus et de l'introduction des autres opérations. Les programmes soulignent que le calcul mental et la connaissance des nombres se renforcent : « L'entraînement quotidien au calcul mental portant sur les quatre opérations favorise une appropriation des nombres et de leurs propriétés. » La rigueur, c'est aussi l'entraînement régulier. Le calcul mental doit être pratiqué tous les jours, pendant la séquence proposée à l'emploi du temps, mais également en saisissant toutes les occasions que la vie de la classe offre.

Le calcul mental est une activité d'excellence dans la construction de l'esprit mathématique car elle fait appel à l'intelligence. Si on la compare aux autres formes de calcul inscrites au programme (posé, calculatrice), c'est évidemment celle qui paraît le plus difficile : le calcul posé apparaît comme plus « reposant » car il n'y a pas à chercher, il suffit d'appliquer une méthode et la réussite passe par la bonne connaissance des tables ; quant à la calculatrice, elle apparaît comme la solution de facilité car le résultat est fourni automatiquement. Il n'empêche que le plus essentiel non seulement pour la construction de l'esprit, mais aussi pour la vie courante, c'est bien le calcul mental car chacun – enfant ou adulte – est quotidiennement confronté à un besoin de calcul, dans des situations où le recours au support papier ou bien à la machine n'est pas toujours possible. Le contrôle du résultat donné par la calculatrice (ordre de grandeur) par un calcul mental est d'ailleurs fondamental. De même pour le calcul posé où une approximation mentale est toujours pertinente.

Les évaluations nationales ont mis en évidence des faiblesses et des manques, en calcul mental et plus généralement en calcul. Des calculs aussi simples que 40 fois 25 ou 52 divisés par 4 ne sont pas réussis par près de deux élèves sur trois lors des évaluations d'entrée en sixième des années 2000. Dans son rapport de 2006, l'inspection générale a d'ailleurs observé que la pratique du calcul était insuffisante dans la plupart des classes visitées. Ce constat est à mettre en rapport avec les faibles résultats.

Le travail de Christophe Bolsius vient donc à point pour permettre aux enseignants d'organiser les apprentissages en calcul mental à l'école élémentaire et d'améliorer les performances des élèves. Professeur de mathématiques, formateur ayant exercé en IUFM, inspecteur de l'Éducation nationale, Christophe Bolsius sait tout l'apport du calcul mental à la formation de l'esprit mathématique. De ses expériences multiples et de sa connaissance fine du terrain, il a su tirer des enseignements précieux qu'il nous restitue avec une grande clarté. L'ouvrage qu'il propose offre les éléments indispensables à la pratique du calcul mental tel que les programmes le demandent et selon les principes que nous venons de rappeler. Les situations sont variées ; toutes sont aisées à mettre en œuvre. La progression est rigoureuse. La tâche de l'enseignant est ainsi grandement facilitée, même si, bien sûr, l'essentiel reste à sa charge.

En devenant « fort en calcul mental », l'élève prendra goût aux nombres, au calcul mental, au calcul et aux mathématiques.

Jean-Louis Durpaire, Inspecteur général de l'Éducation nationale

INTRODUCTION

« Le calcul mental est celui qui se fait sans le concours de l'écriture. Il est tout à fait différent du calcul écrit. Le premier opère simplement sur les nombres ; le calcul écrit, au contraire, opère sur les chiffres, sans tenir compte des nombres, excepté pour le résultat final. »

M. CABOIS, 1909 – Inspecteur de l'enseignement primaire de la circonscription d'Argelès-Gazost

Le calcul mental est une pratique sociale que chacun utilise sans même s'en rendre compte : vitesse, durée, prix, consommation moyenne, valeur approchée, etc. C'est aussi une pratique scolaire et il a toujours fait partie des programmes de l'école primaire. Avant les années 1970, il fallait calculer vite et bien : les nombreux jeunes qui entraient directement sur le marché du travail après l'école élémentaire devaient avoir cette connaissance pratique pour pouvoir être autonomes. La massification de l'enseignement, les réformes des programmes qui l'accompagnaient et l'avènement des outils technologiques de calcul ont pu faire penser que le calcul mental tomberait en désuétude et ne relèverait désormais plus que de l'anecdotique, grâce à quelques individus doués de capacités extraordinaires s'illustrant sur des plateaux de télévision. Il n'en est, heureusement, rien.

Aujourd'hui, la place du calcul mental est réaffirmée par les contenus des nouveaux programmes de l'école primaire et ses vertus sont vantées par les chercheurs en éducation. L'analyse des résultats des élèves aux évaluations nationales de CE2 et de sixième a permis d'établir que de bons résultats en calcul mental en début de cycle 3 sont prédictifs d'une meilleure réussite à l'entrée au collège[1]. Les évaluations internationales comparant les différents systèmes scolaires de l'OCDE vont dans le même sens, insistant sur l'accès à l'autonomie qu'une pratique raisonnée du calcul mental autorise, libérant ainsi l'esprit pour qu'il se concentre sur la stratégie de recherche et la résolution des problèmes.

Le calcul mental dans les programmes

Bref historique : du calcul rapide au calcul mental

En ce qui concerne les apprentissages mathématiques, la réforme des mathématiques modernes et les programmes de 1970 ont déplacé les enjeux, du concret et de la pratique ritualisée vers une approche plus abstraite des concepts. Cela a provoqué un effritement des bases de la connaissance et une scission chez les enseignants, étudiants ou élèves entre ceux qui avaient « la bosse des maths » et ceux qui ne l'avaient pas. À une société organisée en populations qui utilisaient plus ou moins correctement les mathématiques selon leurs besoins et leur niveau de formation a succédé une partition entre ceux qui y comprenaient quelque chose et ceux qui n'y comprenaient rien. Bon nombre des enseignants d'aujourd'hui sont les élèves et les étudiants de cette période.

La situation a évolué à partir du milieu des années 80 avec, d'une part, l'application de nouveaux programmes et, d'autre part, les évaluations nationales de CE2 et de sixième – innovation de la loi

1 S. Morlaix, B. Suchaut, Identification des compétences à l'école élémentaire : une approche empirique à partir des évaluations institutionnelles, IREDU – CNRS 2007.

d'orientation de 1989 – dans les protocoles desquelles figuraient des exercices de calcul mental. Cela a incité les enseignants à remettre cette pratique au goût du jour, voire, pour certains, à sortir de la clandestinité.

Le succès ne s'est pas démenti depuis. Dès 1995, les programmes du cycle 2 parlent de « l'élaboration progressive de différents procédés de calcul : calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit) » et plus loin de « table d'addition : construction, utilisation, mémorisation » ; ceux de cycle 3 parlent de « pratique du calcul exact ou approché en utilisant […] le calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit), l'ordre de grandeur (encadrement, valeur approchée) » sur des nombres entiers ou décimaux[2].

En 2002, consécutivement à la mise en œuvre des nouveaux programmes, c'est un document d'accompagnement, intitulé *Le calcul mental à l'école élémentaire*[3] qui est publié pour aider les enseignants à mettre en œuvre cet enseignement dans leur classe.

En 2007, le texte des programmes distingue clairement ce qui relève d'une pratique mentale, donc personnalisée et variable en fonction des nombres en présence, de ce qui dépend d'une pratique procédurale, systématique et reproductible dans tous les cas en organisant la partie *Calcul* en *Calcul mental* (résultats mémorisés, procédures automatisées, calcul réfléchi), *Calcul en ligne ou posé* et *Calcul instrumenté*.

À la rentrée 2008, on retrouve dans les programmes du cycle 3 les trois entrées maintenant nommées *Calculer mentalement*, *Effectuer un calcul posé*, *Problèmes*.

Finalités du calcul mental

Dès 1910, l'inspecteur primaire Cabois précisait : « Le calcul mental a une importance double. Comme gymnastique intellectuelle, il stimule l'attention, cultive la mémoire en même temps que le jugement et le raisonnement ; c'est le type, par excellence, de la méthode active. Comme utilité pratique, il répond aux nécessités de la vie journalière ; il est une excellente préparation au calcul écrit ; il contribue au bon renom de l'école. »

Aujourd'hui, les didacticiens, les sociologues de l'éducation et les chercheurs qui travaillent sur les processus d'apprentissage ou sur le cerveau[4] insistent sur les vertus du calcul mental. Il permet non seulement de travailler et de stabiliser des connaissances mathématiques sur les nombres et les opérations, mais il développe aussi des capacités et des attitudes tout à fait nécessaires dans d'autres disciplines, comme la concentration ou la mémoire.

Dans le socle commun de connaissances et de compétences, les sept grandes compétences s'organisent en connaissances, capacités et attitudes. En se référant à cette structure, il est possible de présenter les finalités du calcul mental selon le tableau ci-après.

2 Programmes de l'école primaire, ministère de l'Éducation nationale, CNDP, Paris, 1995.
3 Le calcul mental à l'école élémentaire, mathématiques – Documents d'accompagnement des programmes, ministère de l'Éducation nationale – DGESCO, Scéren, 2002.
4 S. Dehaene, La bosse des maths, Odile Jacob, 2003.

Connaissances	Capacités	Attitudes
– Connaître les nombres et leur désignation. – Connaître les propriétés des opérations. – Connaître les tables pour calculer.	– Savoir calculer. – Acquérir le sens des opérations. – Utiliser des stratégies efficaces. – Mettre en œuvre un calcul en situation.	– Attention, concentration, mémoire. – Plaisir, jeu, envie. – Autonomie et prise d'initiatives.

Ce que doit être une séance de calcul mental

Opérations, numération et résolution de problèmes

À l'école élémentaire, une séance de calcul mental doit contenir des opérations, de la numération, de la résolution de petits problèmes avec un objectif d'application et d'automatisation. Le calcul mental recouvre trois points : un ensemble de résultats mémorisés, des procédures automatisées et des stratégies de calcul.

Opérations

Incontournables au cours d'une séance de calcul mental, les opérations se prêtent bien au travail de ces trois points. Les résultats mémorisés sont ceux des tables d'addition ou de multiplication. Les procédures automatisées sont des stratégies instituées en tant que connaissances : l'exemple le plus clair est la multiplication d'un entier par 10. Les stratégies de calcul regroupent toutes les procédures qui varient en fonction des nombres en jeu ; elles s'appuient sur les deux points précédents, qui, lorsqu'ils sont acquis, libèrent la pensée et autorisent la réflexion. Au cycle 3, la partie *Grandeurs et Mesures* pourra apporter des supports à la séance de calcul mental : calcul d'aire (multiplication – division), de périmètre (addition – soustraction), conversions (multiplication, numération), etc.

Numération

D'après les contenus des programmes, la numération se prête bien à cette répartition du travail. En effet, pour beaucoup d'élèves, énoncer le nombre 23 quand on aperçoit 2 paquets de 10 objets et 3 objets isolés relève d'un résultat mémorisé, organiser une collection en paquets de 10 objets pour la dénombrer s'apparente à une procédure automatisée et procéder à des groupements échanges est une stratégie de calcul efficace pour communiquer de manière simple sur la quantité en question. Les nombres décimaux offrent un répertoire d'activités nouvelles pour les classes de CM1 et de CM2.

Résolution de problèmes

Outil privilégié de l'activité mathématique, les problèmes constituent le support essentiel qui permet de donner du sens aux apprentissages en les contextualisant. Ils permettent de travailler les résultats mémorisés, les procédures automatisées et les stratégies de calcul.

Un petit problème comme « Paul avait 5 billes et il en a gagné 2 à la récréation. Combien en a-t-il maintenant ? » qui ne présente pas de difficulté de compréhension du texte, ni de représentation de la situation permet de mobiliser un résultat mémorisé (5 + 2 = 7). D'après la théorie des situations conceptuelles de G. Vergnaud, cette classe de problèmes est résolue avec succès par la majorité des élèves de cycle 2.

Proposé au cycle 3, un problème comme « Le maître a reçu 2 boîtes de 100 craies et 3 étuis de 10 craies. Combien a-t-il reçu de craies en tout ? » permet de tester la connaissance de la numération en base 10. On attend des élèves une procédure automatisée qui repose sur les paquets de 100 et de 10.

Une réponse donnée sous la forme d'un calcul (100 + 100 + 10 + 10 + 10 = 230) est bien sûr juste, mais la procédure à encourager repose sur la numération : 2 paquets de 100 et 3 paquets de 10 font un total de 230 craies.

Enfin, un problème comme « Dans un autobus, il y a 12 passagers. Au premier arrêt, 8 passagers montent. Au second arrêt, 5 descendent. Au troisième arrêt, 20 passagers montent et 5 descendent. Combien y a-t-il de passagers dans l'autobus ? » permet de mettre en jeu des stratégies de calcul. L'information est simple, les données, sauf les deux dernières, sont apportées une par une et les élèves les traitent au fur et à mesure en effectuant les opérations suivantes : 12 + 8 = 20 et 20 – 5 = 15. À la dernière série de données, l'opération à traiter est 15 + 20 - 5. Les stratégies de calcul vont pouvoir s'exercer, entre les partisans du 20 – 5 = 15, ceux du 15 – 5 = 10 et ceux de l'ordre strict des nombres 15 + 20 = 35. Ce type de calcul a déjà été travaillé en calcul mental au CE1 (opérations) et c'est à présent une phase de transfert des connaissances. Pour résoudre ces problèmes, les élèves doivent avoir l'esprit libéré de deux choses : le traitement de l'information et l'incertitude des résultats des calculs.

Mise en œuvre des séances

Calcul mental : entraînement et production

La circulaire du 12 avril 2007 a préconisé un quart d'heure de calcul mental par jour. Si ce temps peut raisonnablement donner lieu à une seule séance au cycle 3, il peut être réparti en deux séances quotidiennes au cycle 2. Une séance de calcul mental est donc un moment court et intense, pendant lequel les élèves sont en réflexion et, surtout, en production.

L'enseignant se servira de ce moment pour recueillir les procédures des élèves, mais décalera dans le temps leur traitement et leur comparaison : ce travail relève d'une séance distincte, menée en amont ou en aval, pour explorer et travailler les différentes stratégies et mettre en place des traces, dans le cahier de mathématiques, dans un calepin de stratégies de calcul mental ou sous forme de référent mural. Pour oser la métaphore sportive ou musicale, on peut dire que la séance où l'on traite, compare, explore, exerce est l'entraînement : on y fait ses gammes, on essaie. Le quart d'heure de calcul mental, c'est le match : on met en œuvre, on joue la partition apprise. En général, au cours du match ou du concert, on n'a pas le temps de se regarder jouer, on doit mettre en application ce qui a été travaillé à l'entraînement.

Les outils

Le maître choisira l'outil en fonction de l'objectif de l'activité et de la nécessité ou non de garder des traces écrites. Si l'objectif est l'entraînement, il privilégiera l'ardoise pour travailler la rapidité. Si l'élève doit mesurer lui-même sa performance, il choisira plutôt de le faire travailler sur le cahier de brouillon (outil personnel de l'élève) ou sur une grille du type *Une minute chrono* (p. 118). Enfin, si le maître veut évaluer et suivre ce que font les élèves, il préférera le cahier du jour ou celui de mathématiques. Il pourra aussi recourir aux outils informatiques : il est alors indispensable qu'il s'assure que l'outil autorise un suivi du travail et des progrès des élèves.

Aider l'élève dans ses tâches

Au cours d'une séance de calcul mental, l'élève doit produire des réponses : cela suppose qu'il se remémore les résultats, ce qui nécessite qu'il mémorise les connaissances, ce qui ne peut se faire sans apprendre. L'analyse des principales difficultés que rencontrent les élèves sur chacun de ces points doit permettre de proposer des pistes de travail et de différenciation pour le maître.

Produire des réponses

Les difficultés rencontrées dans la production de réponses lors des séances de calcul mental sont surtout le fruit d'un manque de confiance, de rapidité et de concentration. L'élève est vite débordé, car il ne sait pas retrouver ses résultats, il n'en est pas sûr, il les confond ou n'est pas efficace dans ses procédures.

Pour aider les élèves, l'enseignant peut explorer les pistes suivantes :
- développer l'automatisation des résultats et les procédés de contrôle ;
- bien articuler ;
- expliciter les microconnaissances en jeu ;
- aider à se poser les bonnes questions ;
- valoriser ce que savent et savent faire les élèves pour leur donner confiance dans cette tâche ;
- donner les calculs par écrit à certains élèves en difficulté pour lesquels la mémorisation est trop coûteuse.

Se remémorer

Quand il s'agit de se remémorer un résultat, les élèves rencontrent deux difficultés essentielles. L'une est purement technique et liée aux contenus : c'est l'interférence entre les résultats proches, que l'on observe particulièrement dans les tables de multiplication. L'autre, plus complexe à analyser, renvoie aux processus de mémorisation. Pour faire une métaphore, se remémorer, c'est garder le chemin praticable et au bout de ce chemin, savoir choisir la bonne porte.

Pour aider les élèves, l'enseignant peut explorer les pistes suivantes :
- donner du sens aux apprentissages ;
- donner des repères et des moyens de contrôle ;
- travailler systématiquement les résultats mémorisés et ne jamais les considérer acquis.

Mémoriser

Mémoriser, c'est retenir pour pouvoir restituer : l'un ne va pas sans l'autre. Il s'agit donc de transférer des données, stockées en mémoire à court terme sous la forme de quelques informations immédiatement utilisables, dans la mémoire à long terme pour qu'elles deviennent des outils de travail, des réflexes « professionnels » de l'élève. Cette automatisation va libérer la pensée et la mémoire à court terme et l'élève pourra alors se concentrer sur des traitements plus complexes. C'est vrai en mathématiques (résolution de problèmes, stratégie de calcul) mais aussi en lecture, l'automatisation de la lecture de certains mots permettant de focaliser l'attention sur la compréhension ou le décodage de mots plus complexes.

Beaucoup d'enfants en difficulté présentent une mémoire de travail inefficace, mais cela s'éduque et s'entraîne.

L'enseignant peut explorer les pistes suivantes :

- faire des gammes, répéter inlassablement des exercices d'entraînement ;
- varier les approches, les exercices et les exemples ;
- entraîner la mémoire de manière active, en la stimulant.

Apprendre

Les raisons pour lesquelles les élèves s'engagent dans les apprentissages sont diverses : ce peut être pour faire plaisir à quelqu'un, ou parce qu'ils y trouvent de l'intérêt, ou parce qu'ils ont intégré que c'est ce qu'ils doivent faire à l'école, mais ce n'est pas parce que l'enseignant enseigne que l'élève apprend.

Si les temps d'enseignement ne manquent pas à l'école, ceux d'apprentissage sont moins nombreux, cette activité étant souvent renvoyée à la maison. Or cela crée de l'inégalité entre les élèves qui peuvent se faire aider et ceux qui ne le peuvent pas. Il faut donc apprendre aux élèves à apprendre.

Pour aider les élèves, l'enseignant peut explorer les pistes suivantes :

- clarifier les enjeux de l'école et des apprentissages ;
- dédramatiser l'erreur et permettre à l'élève de se tromper ;
- poser des balises au moment de la préparation de la leçon, sous la forme « l'élève saura sa leçon si… » ;
- mettre en évidence ce que sait l'élève et ce qu'il lui reste à apprendre.

Présentation de l’ouvrage

À partir de ces analyses, cet ouvrage a pour objectif d’aider les enseignants à programmer et à préparer l’enseignement du calcul mental dans les classes, du CP au CM2. Il commence par un bref rappel des connaissances qu’il est légitime d’attendre d’un élève en fin de grande section de maternelle et propose, dans ce cadre, quelques outils qui pourront servir de remédiation. Le maître qui désirera travailler de manière plus approfondie en amont du CP pourra se reporter aux nombreux ouvrages consacrés plus spécifiquement au calcul à l’école maternelle[5].

Des contenus conformes aux programmes 2008

Les contenus de cet ouvrage sont conformes aux programmes 2008 ; ils font la part belle à l’apprentissage des tables d’addition et de multiplication, dont tout le monde déplore qu’elles ne soient pas assez sues.

Le choix a été fait de se limiter aux contenus qui pouvaient raisonnablement être traités lors de séances de calcul mental. Ce choix s’appuie sur l’organisation et le détail des items qui figurent dans les tableaux qui accompagnent les programmes et qui ont pour objectif d’organiser la progressivité des apprentissages.

Les contenus sont centrés en grande partie sur le travail de planification de l’apprentissage des tables d’addition et de multiplication, ce qui a conduit à présenter les quatre opérations l’une après l’autre pour pouvoir insister sur les apports didactiques spécifiques à chacune d’elles.

Ce n’est évidemment qu’une facilité de présentation et il n’a jamais été question d’envisager la pratique de l’addition sans celle, quasiment simultanée, de la soustraction, ni celle de la multiplication sans celle de la division : ce serait nier ce qui fait le fondement d’une bonne maîtrise des nombres et du calcul. C’est pourquoi dans les progressions proposées à la fin de chaque chapitre, on trouvera les mêmes items dans des chapitres différents : *Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10* figure ainsi dans *L’addition* et dans *La multiplication*.

Un outil pratique de formation et de travail au quotidien

Des pistes pédagogiques et une programmation

Outil pratique de formation et de travail au quotidien, l’ouvrage propose des tâches et une planification en regard des éléments du programme. Il détaille quelques points didactiques, en travaillant notamment autour des différents sens que peuvent avoir les opérations et accorde toute leur importance aux éléments de maîtrise de la langue. Il offre des pistes pédagogiques pour travailler les connaissances et les stratégies et doter ainsi les élèves d’outils efficaces.

5 Il pourra en particulier se reporter à l’ouvrage d’Alain Pierrard, Faire des mathématiques à l’école maternelle, CRDP de l’académie de Grenoble, 2002.

Des exercices

Le livre donne des pistes d'exercices en laissant volontairement au maître le choix des contenus précis, car ces derniers dépendent des progrès et de la réussite de chaque élève. Il guide les maîtres sur les difficultés potentielles des exercices, en détaillant les étapes de l'apprentissage, en identifiant les ruptures comme le passage de la file numérique à la droite graduée et en proposant des activités pour les surmonter.

Des outils et des jeux

Il apporte des outils simples et efficaces, testés dans différentes classes, qui ont permis à tous les élèves de progresser. Il propose aussi des jeux testés en classe qui favorisent le décloisonnement ou le travail en autonomie par petit groupe.

En fonction de sa situation, de sa personnalité, de son expérience, de ses besoins et de ses élèves, chaque maître pourra modifier, adapter, enrichir ces propositions de travail, ces exercices et ces outils et offrir ainsi à ses élèves les clés pour être forts en calcul mental !

LA GRANDE SECTION DE MATERNELLE

L'école maternelle est le creuset des premiers apprentissages et tout ce qui s'y construit l'est pour longtemps. Elle a pour objectif de préparer les élèves à réussir au CP. Dans les activités d'apprentissage qui leur sont proposées, les élèves acquièrent des connaissances et développent des stratégies que le maître doit identifier. C'est l'utilisation régulière de ces connaissances et de ces stratégies qui va permettre aux élèves de mémoriser et d'apprendre. Le maître accompagne ainsi les élèves dans leur désir d'apprendre : il met les élèves en situation de dire et d'exercer ce qui a été appris. C'est pour cela que les activités proposées ci-dessous ont pour ambition de placer les élèves en situation de recherche, afin de les faire réfléchir et apprendre.

Connaissances et stratégies en GS

Dans le cadre du socle commun de connaissances et de compétences et des programmes 2008 pour l'école, il est légitime de se poser la question de ce que doit connaître et savoir faire un élève dans le domaine numérique, en sortant de GS. L'ensemble de la réflexion dépasse le strict cadre du calcul mental, mais ce dernier est le vecteur idéal pour atteindre ces objectifs. À ce niveau, les programmes sont clairs : « C'est le cours préparatoire qui introduira le symbolisme (signe des opérations, signe égal) et les techniques. »

Le travail sur les quantités doit se faire dans des situations qui ont du sens et c'est par le biais de la résolution de problèmes que les élèves acquièrent leurs premières connaissances dans le domaine du calcul. Il faudra ainsi travailler la suite des nombres et la connaissance des premiers entiers pour faciliter la construction d'un premier répertoire de calcul.

La suite des nombres

Les programmes 2008 précisent que les élèves doivent « mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30 ». Cette connaissance est fondamentale parce que l'ordre conventionnel d'énonciation des nombres permet d'abord de dénombrer des collections, puis de calculer sur les quantités et enfin de calculer sur les nombres. Dans les premiers moments de l'apprentissage du calcul, les élèves privilégient en effet souvent la méthode du surcomptage. Passer du comptage au calcul, c'est s'affranchir de cette méthode et quitter le monde du concret des objets pour entrer dans l'abstrait des nombres.

Ainsi, en début d'année, le maître met 3 jetons dans une boîte, puis en ajoute 2 et demande à un élève de dire combien il y en a : dans un premier temps, l'élève dénombre la collection totale et répond 5. Plus tard dans l'année, le maître met 3 jetons dans la boîte, qu'il laisse sous les yeux de l'élève (les jetons sont visibles, mais pas manipulables), et lui donne 2 jetons en main. L'objectif est d'amener l'élève à fixer le nombre 3 (ou 2) en mémoire, puis de compter à partir de ce nombre stocké : c'est le surcomptage. En fonction du nombre de départ stocké, l'élève dira 4 – 5 ou 3 – 4 – 5. Le travail du maître consiste ensuite à énoncer que *3 et 2 font 5* (langage pour les élèves, le mot *plus* ne sera introduit qu'au CP) ; il peut faire un schéma référent et l'afficher dans la classe pour laisser cet outil à la vue des élèves, qui pourront à nouveau s'en servir lors de prochains problèmes : il n'est pas exclu que certains enfants puissent inférer des résultats à partir des connaissances installées dans ce contexte.

Pour permettre aux élèves de mémoriser la suite des nombres, la répétition quasi quotidienne du dénombrement des élèves présents dans la classe le matin ne suffit évidemment pas. Il faut faire travailler les élèves individuellement sur ce point, à l'aide d'exercices variés comme ceux proposés ci-dessous. La différence d'âge entre les élèves a une influence sur leurs connaissances, mais une méconnaissance de la suite des entiers en GS est le signal qu'il faut immédiatement entreprendre un travail de remédiation.

La suite des entiers

Au quotidien et à toute occasion, faire dire la suite des entiers en pointant les nombres sur la file numérique : comptage des élèves présents, des élèves absents, détermination de la date. Il est important de faire le lien avec l'entier placé juste avant et l'entier situé juste après.
À terme, une fois la suite des entiers connue, on cherchera le nombre d'élèves absents en déterminant l'écart entre le nombre d'élèves présents et le nombre total d'élèves dans la classe. On pourra aussi chercher le nombre d'élèves présents en connaissant le nombre total d'élèves et le nombre d'absents. Ces activités seront menées avec, puis sans le support de la file numérique.

Dit et tape

Faire dire la suite des entiers en tapant dans les mains ou en effectuant tout autre bruitage pour rythmer les mots. Puis faire évoluer l'exercice en disant par exemple qu'après 5, on tape 3 fois sans dire les nombres et qu'on reprend à haute voix. Vérifier si la suite est correcte : l'élève doit dire 9. On peut commencer par taper sans rien dire, puis commencer à haute voix au signal.

Exemple : 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – tape – tape – tape – 9.

File indienne

Dans les situations de file indienne, demander aux élèves de se compter un par un dans l'ordre. Puis demander qui est le premier, le cinquième, le deuxième (éviter le mot *second*, plus difficile) et ainsi de suite jusqu'au dernier (travail sur l'aspect ordinal des nombres). On pourra profiter de cet exercice pour travailler aussi les notions *entre*, *devant*, *derrière*.

À reculons

Dans des situations de jeu, faire dire la suite des entiers à reculons.

Exemple : 5 – 4 – 3 – 2 – 1.

Toutes les comptines numériques ou les livres à compter peuvent renforcer cet apprentissage.

Les premiers nombres

Les élèves doivent savoir « associer le nom des nombres connus avec leur écriture chiffrée », disent les programmes 2008. Il faut bien se garder de croire que les nombres connus sont ceux de la file numérique jusqu'à 30. Pour favoriser une entrée dans le domaine du calcul, les élèves doivent bien connaître la correspondance entre les trois formes de présentation des nombres (nom du nombre donné à l'oral, écriture en chiffre, collection) jusqu'à 9 environ.

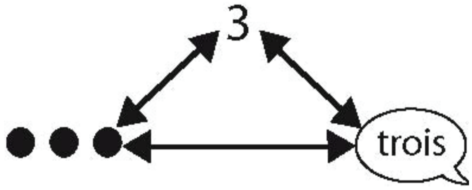


Figure 1 : Les trois formes de présentation des nombres.

Cela suppose, d'une part, que les élèves sachent énoncer le nom du nombre lorsque le maître leur montre une étiquette ou une carte représentant le symbole et, d'autre part, qu'ils sachent dénombrer une quantité d'objets et répondre à la question « Combien y en a-t-il ? »

Dans ce cas, la stratégie de dénombrement peut varier selon le nombre et l'organisation spatiale des éléments de la collection : reconnaissance visuelle globale d'une quantité jusqu'à 3 ou 4, organisation possible en sous-collections favorisant le calcul ou le comptage, éléments mobiles ou non, crayon pour marquer ou entourer, etc.

Comme c'est la connaissance des nombres et l'association collection – nom du nombre qui est en jeu ici et non le dénombrement d'une collection, il faut éviter de rendre la tâche trop complexe et présenter des collections suffisamment bien organisées pour permettre une reconnaissance rapide. De nombreuses présentations sont possibles : doigts, dé, dominos, cartes à jouer, cartes à points, etc. Cela repose sur la connaissance de la suite des nombres. Il est nécessaire de savoir faire le lien entre le symbole chiffré écrit et le mot prononcé oralement.

Collection et nom du nombre

À l'aide de présentations variées (cartes à points, doigts, dé, composition d'objets, etc.), présenter une collection et demander le nom du nombre pour automatiser la correspondance. Éviter de suivre l'ordre de la suite des entiers.

La piste à trois couleurs

À l'aide du jeu ***La piste à trois couleurs*** (p. 101), demander aux élèves de construire une collection correspondant à la carte tirée (symbole chiffré ou collection) et de la poser sur la piste.

<u>Exemple</u> : L'élève tire une carte portant le nombre 5, il choisit 5 jetons d'une même couleur qu'il pose sur la piste. S'il n'a pas la place, il passe son tour.

Dénombrement et calcul

Travailler les stratégies de dénombrement (correspondance entre collection, nom du nombre et symbole écrit chiffré) pour les faire évoluer vers des procédures de calcul en fonction de l'organisation spatiale des sous-collections.

<u>Exemple</u> : À l'aide de présentations variées (cartes à points, doigts, dé, composition d'objets, etc.), le maître montre une représentation du 3 et une du 2 et attend le dénombrement total des deux collections. Il privilégie les procédures qui s'appuient sur le calcul. L'explication orale des stratégies des élèves peut aider à l'installation des premiers résultats mémorisés. Ainsi, dans le cas de l'utilisation des doigts, un élève pourra remarquer que 2, c'est exactement ce qu'il manque à la main qui indique 3 pour être complète et faire 5.

Les problèmes sur les quantités

Le dénombrement et la connaissance des nombres sont les clés pour « comparer les quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités ». En effet, c'est le recours au nombre qui permettra de mémoriser le cardinal d'une collection pour construire une collection égale (c'est-à-dire de même cardinal), de comparer efficacement deux quantités, de compléter une collection donnée pour avoir autant d'objets que dans la collection témoin, de partager une collection.

Pour que les élèves soient réellement dans une situation intellectuellement stimulante, ils ne doivent pas avoir le référent numérique sous les yeux et le mot « nombre », qui est la clé du succès de ces exercices, ne doit surtout pas être prononcé par le maître dans sa consigne.

Dans tous les exercices proposés, il faut garder à l'esprit que c'est grâce au nombre que les élèves vont pouvoir anticiper le résultat de leurs actions. À terme, le maître devra leur demander, avant de manipuler les collections, de proposer une réponse numérique. La manipulation des collections permettra une vérification pour confirmer ou infirmer les propositions des élèves.

Construire une collection égale

Faire construire une collection de même cardinal qu'une collection donnée (correspondance entre le nom du nombre ou le symbole écrit et la collection) : le maître donne une collection d'objets dont le nombre est fonction de la capacité de l'élève et de sa connaissance de la suite des entiers ; il demande à l'élève d'aller construire, dans un autre endroit, une même collection, c'est-à-dire une collection égale. Ce sont les stratégies de mémorisation de la quantité qui vont devoir évoluer : l'élève doit passer de la reconnaissance visuelle globale, des doigts ou de la prise écrite d'informations à la mémorisation du nombre total d'objets.

Compléter une collection

Faire compléter une collection pour obtenir une collection égale à une collection donnée. Là encore, c'est l'éloignement des deux collections qui fait l'intérêt de l'exercice et la capacité à se souvenir des deux quantités pour les comparer qui garantit le succès de la tâche. Les élèves doivent absolument connaître la suite des entiers pour réussir cet exercice.

Comparer deux collections

Faire comparer deux collections. Si, dans un premier temps, ces deux collections peuvent être côte à côte et déplaçables pour que les élèves puissent en apparier les objets, l'impossibilité de les déplacer, puis leur éloignement rendra le recours au nombre nécessaire. Une bonne connaissance de la suite des entiers est là encore nécessaire pour pouvoir mettre en place des procédures de comparaison efficaces.

Partager une collection

Faire partager une collection. Dans le contexte familier d'une activité de classe, les élèves seront amenés à partager une collection en plusieurs parts égales (2, 3 ou 4 en fonction du contexte).

Les contraintes matérielles feront que le maître acceptera ou non le partage d'un même objet en plusieurs morceaux. Ainsi, on peut partager exactement en deux parties égales une collection de 13 pommes, alors que ce n'est pas possible pour des crayons. Aucune connaissance n'est exigée mais il faut encourager une pratique régulière.

Remarque : Partager 21 bonbons en en donnant 1 à chaque élève de la classe ne s'apparente pas à un partage, mais plutôt à une activité de comparaison terme à terme entre le nombre de bonbons et celui d'élèves.

Le calcul

À l'école maternelle, il est primordial de donner aux élèves le temps de passer du concret à l'abstrait, sans hâte, mais avec ambition. Ils doivent ainsi savoir calculer sur de petits nombres, toujours dans le cadre de la résolution de problèmes et sur un champ numérique restreint. Un travail régulier et fréquent permettra d'installer le premier répertoire de calcul, sans les symboles.

On peut faire l'hypothèse qu'au sortir de la grande section de maternelle, les élèves auront suffisamment fréquenté les résultats suivants pour être capables de les mobiliser dans une tâche.

- $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $1 + 4 = 5$;
- $2 + 1 = 3$, $2 + 2 = 4$, $2 + 3 = 5$;
- $3 + 1 = 4$, $3 + 2 = 5$;
- $4 + 1 = 5$;
- $5 - 1 = 4$, $5 - 2 = 3$, $5 - 3 = 2$, $5 - 4 = 1$;
- $4 - 1 = 3$, $4 - 2 = 2$, $4 - 3 = 1$;
- $3 - 1 = 2$, $3 - 2 = 1$;
- $2 - 1 = 1$.

Le trésor caché

Travailler, en fonction de la capacité d'abstraction des élèves, selon le principe de l'outil ***Le trésor caché*** (p. 108) : mettre des objets dans un sac, en ajouter d'autres, en enlever pour faire travailler les opérations décrites ci - dessus. Au début, les objets sont manipulables, puis ils sont seulement visibles (lancer des dés, par exemple), puis présents mais invisibles dans un sac opaque ; enfin, le maître pourra proposer de travailler directement sur les nombres.

La piste à trois couleurs

À l'aide du jeu ***La piste à trois couleurs*** (p. 101), demander aux élèves de construire une collection correspondant à la carte tirée sous la forme d'une somme de deux sous-collections de couleurs différentes (symbole chiffré ou collection) et de la poser sur la piste.

Exemple : L'élève tire une carte portant le nombre 5, il doit construire une collection qu'il peut poser sur la piste : *5* ou *3 et 2* ou *4 et 1*. S'il ne peut pas, il passe son tour.

Proposition de progression

Nombres et calcul mental en maternelle

Programme	Tâches	À partir de	Exemples	Outils
Associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée.	Reconnaître les premiers entiers jusqu'à 9.	Toute l'année.	Le maître montre une carte figurant une collection ou un symbole chiffré et l'élève énonce le nom du nombre.	– File numérique avec plusieurs représentations des nombres. – Cartes de *Memory*. – La piste à trois couleurs.
Résoudre des problèmes portant sur les quantités.	Résoudre des problèmes sur les premiers nombres (total inférieur ou égal à 5).	Premier trimestre.	Collections à dénombrer, comparer, construire, compléter, partager.	– Toute collection d'objets de la classe. – Le trésor caché.
		Deuxième trimestre.	Collections visibles mais non manipulables.	– Deux gros dés en mousse. – La piste à trois couleurs.
		Troisième trimestre.	Collections dont l'une au moins est non visible, toutes deux présentes pour permettre la vérification.	– Collections d'objets dans des sacs opaques. – Le trésor caché.
Mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30.	Réciter la suite des nombres.	Toute l'année.	Activités de comptage, de dénombrement.	File numérique.
	Compter de 1 en 1 en avant ou en arrière à partir d'un nombre donné.	Deuxième trimestre	Stratégie de résolution de problèmes portant sur les quantités.	File numérique.
	Nommer le nombre qui suit ou qui précède un nombre donné.	Toute l'année.	Activités de comptage, de dénombrement.	– Calendrier. – File numérique.

L’ADDITION

L’addition est l’opération la plus souvent utilisée en calcul mental, que ce soit à l’école ou dans la vie de tous les jours. Pour être performant, il faut avoir construit deux choses : la connaissance des résultats des tables d’addition et la pratique de stratégies variées de calcul. L’apprentissage – et, à terme, la mémorisation – des tables est donc un enjeu majeur car il permet aux élèves d’accéder à une autonomie de réflexion pour mettre en place des stratégies de calcul efficaces, qui s’enrichiront tout au long de la scolarité.

La maîtrise de l’addition se construit au cycle 2. Après une pratique intuitive à l’école maternelle, on installe les signes opératoires au CP, puis on exige la connaissance des tables en fin de cycle 2 et enfin on aborde, au cours du cycle 3, l’addition des nombres décimaux et de quelques fractions simples.

L’apprentissage des tables d’addition

À l’entrée au CP, l’enseignant doit s’assurer que la suite des nombres jusqu’à 30 et les compléments à 5 sont connus. Si ce n’est pas le cas, ces connaissances seront introduites le plus rapidement possible. Le maître doit maintenant introduire le symbolisme, les mots *plus* et *égal* et la propriété de commutativité de l’addition (3 + 2 = 2 + 3). Les élèves doivent aussi apprendre à calculer dans le champ des tables d’addition, de 1 + 1 à 10 + 10.

La principale difficulté rencontrée lors de l’apprentissage des tables d’addition est que, très souvent, les élèves apprennent des résultats qui n’ont pas de sens pour eux. L’idée est donc de proposer une nouvelle démarche d’apprentissage, fondée sur les relations entre les nombres. Cette démarche repose sur un découpage du tableau de Pythagore en différents secteurs, qui correspondent à une connaissance ou à une stratégie de calcul. Sans stratégie, pas de connaissance, sans connaissance, pas d’autonomie.

La démarche s’organise en huit points (les sept familles de résultats et le tableau de Pythagore) qui s’articulent et se répondent pour aboutir à une présentation des connaissances sous la forme synthétique d’un tableau à double entrée. Les sept familles de nombres ont chacune leur identité, qu’il faut rappeler régulièrement en classe en usant de l’image mentale créée par le codage des différentes cases. Il est vivement conseillé de suivre l’ordre logique d’introduction des sept familles de résultats présenté ci-dessous, dans la mesure où le développement de certaines stratégies ne peut se faire que si les connaissances préalables ont été abordées. Dans tous les exercices proposés, l’enseignant donnera la consigne à l’oral et demandera une réponse écrite aux élèves.

Le tableau de Pythagore de l'addition

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Notions travaillées à partir du tableau de Pythagore

Notions	**Exemples**	**Connaissance ou stratégie ?**
Les suivants	1 + 1 ; 5 + 1 ; 19 + 1.	connaissance
Les règles de la numération	10 + 5 ; 10 + 7 ; 10 + 10.	connaissance
Les doubles	2 + 2 ; 3 + 3 ; 9 + 9.	connaissance
Les compléments à 10	3 + 7 ; 4 + 6 ; 5 + 5 ; 9 + 1.	connaissance
Les presque doubles	6 + 5 ; 6 + 7 ; 7 + 6 ; 7 + 8.	stratégie
Les sommes inférieures à 10	3 + 6 ; 6 + 2 ; 8 + 1.	connaissance
Le passage par le paquet de 10	5 + 6 = 5 + 5 + 1 ; 8 + 9 = 8 + 2 + 7.	stratégie

Les suivants

Il s'agit dans un premier temps de travailler la correspondance entre l'ajout de 1 et le suivant (ou le successeur) d'un nombre. Le maître installera le vocabulaire *précédent – suivant*, *avant –après*, *prédécesseur – successeur* en fonction de la maturité des élèves.

Cette connaissance peut se travailler à l'ardoise, mais aussi à la calculatrice, afin de faire le lien entre les termes employés et les opérations correspondantes.

Le suivant

Ajouter 1, dans le champ numérique connu. On travaille d'abord avec les nombres à un chiffre, puis à deux chiffres de 11 à 16, puis avec tous les nombres à deux chiffres, puis le passage à la dizaine supérieure.

Exemples : 7 + 1, 4 + 1, 11 + 1, 17 + 1, 29 + 1.

Les règles de la numération

La difficulté tient au fait que le nom des nombres de *onze* à *seize* ne reflète pas leur écriture. Autant un élève se représente assez facilement *dix-sept* comme étant écrit avec un 1 à gauche, correspondant à un paquet de 10 unités regroupées, et un 7 à droite, correspondant à 7 unités, autant il se représente bien plus difficilement *quinze*, par exemple. Ce sont donc bien des connaissances qu'il faut installer, en automatisant la correspondance entre les trois formes de présentation des nombres (nom du nombre, écriture chiffrée, collection) comme cela se travaille à l'école maternelle pour les tout premiers entiers. Puisqu'il faut travailler la rapidité de la correspondance entre la collection et le nom du nombre, il est inutile de rendre la tâche de décodage des quantités trop complexe : elles seront présentées sous forme de paquets de 10, certes variés dans leur présentation, mais aisément identifiables.

La numération

Travailler les additions de 10 + 1 à 10 + 9, de 1 + 10 à 9 + 10, et enfin 10 + 10.

Les doubles

Travaillée parfois comme une comptine, la mémorisation des doubles des premiers entiers jusqu'à 10 ne présente pas de difficulté majeure et est en général rapide. L'enseignant entretiendra l'automatisation des résultats, en utilisant, par exemple, la grille du *Une minute chrono* (p. 118), qui demande aux élèves de fournir le plus grand nombre de réponses en un temps imparti. L'outil permet de travailler la rapidité de restitution des résultats en insistant sur leur nécessaire automatisation : même si de nombreuses répétitions existent entre les lignes de calcul, les élèves doivent comprendre qu'ils seront plus performants en allant chercher le résultat en mémoire qu'en essayant d'aller le retrouver dans les lignes précédentes.

Les doubles

Automatiser les calculs des doubles : 1 + 1, 2 + 2, 3 + 3, 4 + 4, 5 + 5, 6 + 6, 7 + 7, 8 + 8, 9 + 9, 10 + 10.

Les compléments à 10

La connaissance des compléments à 10 est un passage obligé pour l'ensemble des activités numériques du cycle 2 : il faut installer cette connaissance et l'entraîner tout au long de l'année de CP. La stabilisation de cet apprentissage garantit une bonne maîtrise de la numération décimale.

L'enseignant pourra procéder avec des objets manipulables et regrouper deux collections (aspect cardinal), ou bien chercher de combien de cases il faut avancer sur la file des nombres (aspect ordinal), ou bien encore travailler directement dans l'abstrait des nombres.

Les outils proposés pour entraîner cette connaissance sont le *Une minute chrono* (p. 118) et *La piste à trois couleurs* (p. 101). Les jeux de cartes du commerce sont aussi très utiles, il suffit d'en enlever les figures et de faire jouer les élèves par deux, selon le principe de la bataille. On peut aussi, de manière plus classique, travailler avec l'ardoise. Un référent mural est indispensable.

Les compléments à 10

Automatiser les sommes suivantes : 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6, 5 + 5, 9 + 1, 8 + 2, 7 + 3, 6 + 4.

Les presque doubles

Dans le tableau de Pythagore, les presque doubles se situent sur les lignes placées juste au-dessus et juste en dessous de la diagonale des doubles. Une fois les doubles installés, le maître propose un calcul de presque double et demande aux élèves de trouver une stratégie pour obtenir le résultat. Il demande, par exemple, de calculer 6 + 5. En utilisant les connaissances travaillées précédemment (le suivant ou le précédent et les doubles), les élèves peuvent proposer les deux stratégies suivantes :

- 6 + 5 = 6 + 6 – 1 = 12 – 1 = 11 ;
- 6 + 5 = 1 + 5 + 5 = 1 + 10 = 11.

Il faudra valoriser ces deux stratégies et les faire vivre dans la classe.

Les presque doubles

Ce sont les sommes : 1 + 2, 2 + 3, 3 + 4, 4 + 5, 5 + 6, 6 + 7, 7 + 8, 8 + 9, 2 + 1, 3 + 2, 4 + 3, 5 + 4, 6 + 5, 7 + 6, 8 + 7, 9 + 8.

Les sommes inférieures à 10

C'est le comptage qui va permettre d'installer la connaissance des résultats du triangle de cases blanches (triangle supérieur du tableau de Pythagore). Cette technique, qui repose sur la maîtrise de la suite des nombres et la capacité à la réciter à partir de n'importe quel point de départ (cas du surcomptage) est transitoire : elle ne sert qu'à installer les connaissances qui seront automatisées par la suite. Le maître travaillera d'abord avec deux collections manipulables, puis avec deux collections dont une seule est manipulable, puis avec deux collections visibles mais non manipulables ; il aboutira enfin à une pratique sur les nombres, plus abstraite.

Le triangle supérieur

Les sommes inférieures à 10 : 2 + 4, 2 + 5, 2 + 6, 2 + 7, 3 + 5, 3 + 6, 4 + 2, 5 + 2, 6 + 2, 7 + 2, 5 + 3, 6 + 3.

Le passage par le paquet de 10

Le passage par le paquet de 10 se met en place parallèlement au travail de dénombrement mené en résolution de problèmes : on y organise les collections en paquets de 10 pour les dénombrer plus facilement. Il est indispensable de faire acquérir cette stratégie, notamment aux élèves en difficulté. C'est en l'enseignant et en la répétant systématiquement qu'elle va devenir un automatisme.

Une des difficultés des élèves les plus fragiles est le manque de démarche, de stratégie, d'anticipation et de planification de l'action. C'est pourquoi il faut, pour les armer d'une stratégie efficace, privilégier l'organisation en paquets de 10 dans les activités de dénombrement ou de partage construites à partir de collections d'objets. Cette activité de calcul résonne en plus avec les principes de base de la numération décimale, ce qui permet de donner du sens aux apprentissages.

Les outils pour travailler cette stratégie sont variés : dans cet ouvrage, on pourra utiliser le *Une minute chrono* (p. 118) ou *La piste à trois couleurs* (p. 101). Il convient de réfléchir à la difficulté que représente l'organisation spatiale des objets dans la construction des paquets de 10 (voir *La construction de la dizaine*, p. 74). Ainsi, certaines représentations sont plus faciles à exploiter que d'autres. Parmi les plus faciles à utiliser, on peut trouver les cartes à points, les doigts, les boîtes de 10 objets ou le triangle équilatéral de base 4 objets. Parmi les plus complexes, on trouve le schéma d'un sac fermé par un nœud dans lequel les 10 objets sont placés aléatoirement et plus généralement toute représentation qui n'est pas suffisamment structurée dans l'espace[6], sur laquelle un contrôle visuel n'est pas suffisant pour en donner le nombre avec assurance.

Le passage par 10

- 2 + 9, 3 + 8, 4 + 7, 7 + 4, 8 + 3, 9 + 2 ;
- 3 + 9, 4 + 8, 5 + 7, 7 + 5, 8 + 4, 9 + 3 ;
- 5 + 8, 4 + 9, 8 + 5, 9 + 4 ;
- 5 + 9, 6 + 8, 8 + 6, 9 + 5 ;
- 6 + 9, 9 + 6 ;
- 7 + 9, 9 + 7.

Le tableau de Pythagore de l'addition

C'est le dernier temps de l'apprentissage : sa construction en classe permet la synthèse des connaissances et des stratégies de calcul présentées ci-dessus et facilite leur mémorisation par les élèves. Le maître organise par ses consignes (cases unies pour les connaissances ou barrées pour les stratégies) le remplissage des zones du tableau : le codage est important parce qu'il facilite visuellement la mémorisation en identifiant des résultats qui font partie d'une même famille.

Cette organisation repose évidemment sur des choix : en fonction des priorités du maître ou des connaissances antérieures partagées dans la classe, il est possible, par exemple, de travailler 5 + 5 = 10 non pas comme un double mais comme un complément à 10. L'essentiel, et c'est ce qui guide cette démarche, est que les élèves retiennent la connaissance, indépendamment de la façon dont elle a été introduite.

Produire des décompositions additives inférieures à 10

À part 2, tous les nombres ont au moins deux décompositions additives. Le maître donne l'entier et les élèves doivent proposer un certain nombre de décompositions additives.

6 C'est d'ailleurs une des difficultés qui a été gommée par la seconde épreuve des évaluations diagnostiques nationales de CE1 dans l'édition 2007, exercice 20 de la première partie (Ministère de l'Éducation nationale, DGESCO, septembre 2007).

La table d'addition des nombres inférieurs à 10

De $1 + n$ à $10 + n$, où n est un nombre à un chiffre, interroger les élèves à tour de rôle et rapidement pour automatiser les réponses. Les élèves sont debout et celui qui donne une mauvaise réponse doit s'asseoir : le gagnant est le dernier debout. On peut interroger dans une ou plusieurs tables.

Remarque : La plupart des exercices précédents peuvent être travaillés avec le ***Une minute chrono*** (p. 118) ou le ***Jeu de l'horloge*** (p. 99). Cette liste d'exercices clôt l'apprentissage des résultats des tables d'addition.

Conclusion

Cette démarche présente les avantages suivants :
- elle installe dès le CP des stratégies de calcul variées (les presque doubles, les additions à retenues) qu'il faut entretenir ;
- elle conforte le travail entrepris en numération sur l'organisation en paquets de 10 ;
- elle ne présente la structure classique de la table d'addition qu'en fin de construction du tableau de Pythagore, les élèves n'apprenant un extrait de ce tableau (vertical ou horizontal) que lorsque cela est nécessaire ;
- elle permet de faire aisément le lien avec la numération, la suite des nombres et le comptage.

Il restera à s'assurer de la bonne compréhension par les élèves de la correspondance entre avancer de n nombres dans la suite (aspect ordinal du nombre) et ajouter n à un nombre donné (aspect cardinal du nombre).

Effectuer mentalement des additions

Pour calculer mentalement de manière efficace, il faut développer des stratégies variées, en fonction des nombres en jeu dans l'addition. Au cycle 2, il est donc indispensable que les élèves connaissent les résultats des tables, qui leur seront nécessaires pour décomposer le calcul en différentes étapes. En libérant la pensée, cette connaissance crée de l'autonomie dans l'action. À partir du cycle 3, le ***tableau de nombres*** (p. 116) ne devrait plus être utilisé qu'en remédiation ou pour aider les élèves en difficulté.

Travaillées depuis deux ans, les stratégies de calcul d'addition de nombres entiers conjuguées avec l'automatisation des résultats des tables d'addition doivent être stabilisées, entraînées avec pour objectifs :
- de trouver rapidement des ordres de grandeur (notamment lors de l'utilisation des grands nombres) ;
- de résoudre des problèmes simples ;
- de consolider les connaissances en numération ;
- de pratiquer avec aisance le calcul posé. L'introduction des nombres décimaux et des fractions ouvrira un nouveau champ de travail, de nouvelles pistes de réflexions. D'autres stratégies seront abordées au chapitre consacré à ces nouveaux nombres.

CP

Dans cette partie, on suppose que les résultats des tables d'addition sont connus, ce qui ne veut pas dire qu'on ne doit l'aborder qu'une fois le travail précédent terminé. Pour stimuler l'élève et lui montrer le but à atteindre, rien n'est plus motivant que de lui faire prendre conscience de ses manques et de lui indiquer la marche à suivre pour les compenser.

Effectuer les premières additions

Un outil simple permet d'effectuer les premières additions : il s'agit d'un *tableau de nombres*, conforme à la numération décimale (p. 116) et construit en lien avec le champ numérique connu des élèves. Dans un premier temps, ce tableau comprendra les nombres de 0 à 69. Il sera complété en fin de CP, lorsqu'on travaillera les nombres entiers entre 70 et 99, qui présentent une nouvelle forme d'irrégularité dans leur nom. Une variante de ce tableau sous forme de piste comme celle du *Jeu de l'oie* permet de faire le lien entre l'aspect cardinal et l'aspect ordinal du nombre.

Le tableau est affiché dans la classe ; son intérêt est de stimuler l'attention visuelle des élèves et de rendre manifeste la régularité de la numération en base 10. Pour l'utiliser, il suffit de placer un point de repère sur le nombre de départ choisi et de se déplacer comme sur une file numérique. Quand les élèves se seront approprié l'outil au travers d'un travail régulier et de calculs élémentaires et récurrents (+ 1, + 10), le maître pourra utiliser des flèches pour représenter ces calculs :

⇨ représente « Ajouter 1 ».

⇩ représente « Ajouter 10 ».

Ce codage permet de se déplacer dans le tableau un peu comme on se déplace dans un quadrillage, en suivant un chemin ou une suite d'instructions élémentaires.

Extrait du tableau des nombres de 10 à 39

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

À partir des codages simples, on peut dans un premier temps proposer un nombre de départ et demander quel sera le nombre d'arrivée si on suit une série d'instructions :

14 ⇨ ⇩ ⇩ ⇨ ⇨ Quel nombre est atteint ?

On peut aussi demander quelle(s) instruction(s) il faut écrire pour rendre l'écriture suivante correcte :

7 ⇩ ⇨ ⇨ Quelle instruction faut-il écrire ici ? ⇩ ⇩ 49

Plus tard, on pourra aussi ajouter de nouvelles instructions qui seront représentées par des flèches diagonales :

 représente « Ajouter 9 ».

 représente « Ajouter 11 ».

Comme tout nouvel outil, ce tableau demande un temps d'apprentissage et de familiarisation. Il pourra ensuite servir de support visuel lors du travail sur les opérations suivantes.

Calculer mentalement des sommes – Utiliser les tables d'addition

Les sommes du type 3 + 5 + 7

On pourra suivre la progression suivante : une somme d'abord inférieure à 10 (exemple : 3 + 4 + 2), puis égale à 10 (exemple : 4 + 4 + 2), puis composée de deux entiers dont la somme fait 10 (exemple : 3 + 5 + 7, stratégie de calcul), puis composée de trois nombres à un chiffre quelconques (exemple : 8 + 5 + 6). *Le nombre cible* (p. 107) permet de travailler cette compétence.

Ajouter des billets et des pièces

Les exercices sur la monnaie permettent de faire ce type de sommes de petits nombres. Le maître donne un prix et fournit une liste de pièces et de billets disponibles ; les élèves doivent écrire la somme en question. On pourra éventuellement rendre l'exercice plus complexe en ne donnant pas les euros pour payer le prix juste : les élèves devront alors proposer un nombre immédiatement supérieur et envisager un rendu de monnaie.

Les sommes du type 16 + 5 ou 16 + 9

Elles s'appuient sur les résultats des tables d'addition et permettent aux élèves de réviser les résultats mémorisés. S'il n'y a pas de retenue, en faisant référence aux résultats mémorisés, on mettra en évidence qu'il suffit de calculer sur les chiffres des unités : on reste sur une même ligne du tableau. Avec retenue, on privilégiera le passage par la dizaine (compléments à 10 pour un passage à la ligne dans le tableau). Le plus important est que les élèves réussissent par la stratégie qui leur est propre. Le maître privilégiera les stratégies efficaces qui s'appuient sur le calcul et non sur le surcomptage.

Par exemple, s'il s'agit de calculer mentalement 16 + 5, les stratégies efficaces sont les suivantes :

- en utilisant le tableau des nombres :
  - partir de 16, ajouter 4, puis 1,
  - partir de 5, ajouter 10, puis 5 puis 1,
  - partir de 5, ajouter 5, puis 10, puis 1,
- en utilisant les stratégies de calcul :
  - décomposer 5 en 4 + 1,
  - décomposer 16 en 10 + 6,
  - décomposer 16 en 15 + 1.

Sommes de 11 + 1 à 19 + 9

Cet exercice permet de réinvestir les résultats des tables d'addition en isolant la dizaine.

Sommes de 10 + 1 à 60 + 9 (total inférieur à 69)

Ajouter un nombre à un chiffre à un nombre à deux chiffres en distinguant quatre cas : rester dans la même dizaine (33 + 4), choisir un nombre à deux chiffres se terminant par 0 (30 + 8), compléter à la dizaine supérieure (46 + 4) et entrer dans la dizaine suivante (37 + 6).

Les sommes du type 27 + 18

En général, plus les nombres sont grands, plus les stratégies sont nombreuses. On les identifiera et, sans rejeter totalement les plus coûteuses, on montrera que certaines sont plus rapides et plus efficaces que d'autres.

Par exemple, pour calculer mentalement 34 + 25, on peut partir de 34, ajouter 20 puis 5 et aboutir à 59. On peut aussi partir de 25. Le nombre d'opérations élémentaires à effectuer peut être un critère d'efficacité de la procédure. Le support du tableau est précieux dans les premiers temps pour visualiser les déplacements correspondants.

S'il s'agit de calculer mentalement 27 + 18, les stratégies sont plus nombreuses. À partir de 27, on peut proposer, entre autres :

- d'ajouter 10, puis 3 (passage à la dizaine), puis 5 ;
- d'ajouter 20 et d'enlever 2.

La première stratégie nécessite de savoir décomposer 18 en 10 + 8, puis de faire le choix de décomposer 8 en 3 + 5 et enfin de savoir que 7 + 3 = 10, ce qui prouve bien qu'il est nécessaire de connaître correctement les résultats du tableau de Pythagore de l'addition pour mettre en œuvre les calculs et avoir suffisamment de maîtrise et d'autonomie pour faire les bons choix.

Sommes du type 24 + 32 (sans franchissement de la dizaine)

Si on se réfère au ***tableau de nombres*** (p. 116), ces sommes peuvent se coder par la combinaison de déplacements vers la droite et de déplacements vers le bas. On insistera sur l'ajout de dizaines entières.

Exemples : 24 + 32, 34 + 20.

Sommes du type 45 + 17 (avec franchissement de la dizaine)

On proposera toute somme de deux nombres à deux chiffres dont le total est strictement inférieur à 70 dans un premier temps, puis inférieur à 100 plus tard.

Exemple : 45 + 17.

Les sommes à trois termes

Sommes du type 32 + 15 + 8 (total inférieur à 100)

Le nombre à un chiffre sera choisi pour permettre une somme partielle facile.

Exemple : 32 + 15 + 8.

CE1

Calculer au-delà de 100

Dès le début d'année, le maître remettra en place les connaissances et les stratégies apprises au CP, en proposant les exercices précédents à un rythme plus soutenu. Le tableau de nombres (p. 116) ne pourra plus être utilisé aussi simplement que quand la somme ne dépassait pas 100. Si on veut encore l'utiliser, on pourra utiliser un carton sur lequel le mot *cent* est écrit et le poser à gauche de la case 0 dès que le mot est prononcé dans le calcul.

Par exemple, pour calculer mentalement 78 + 43, on peut ajouter 3 à 78 puis ajouter 40 :
- 78 + 3 = 78 + 2 + 1 = 80 + 1 = 81 ;
- 81 + 40 = 121.

Il faut alors soit favoriser le comptage de 10 en 10, qui est une pratique habituelle du cycle 2 (91 – 101 et poser le carton *cent* – 111 – 121), soit additionner les paquets de 10 en appui sur la numération. Ainsi, 12 paquets de 10 font 1 paquet de 100 et 2 paquets de 10, soit 120.

Compter de 10 en 10, de 100 en 100

De 10 en 10

Il s'agit de faire produire des listes de nombres à partir d'un nombre donné. Donner le nombre de départ, le pas + 10 et un nombre à ne pas dépasser, qui permettra aussi de tester la comparaison de deux entiers. L'enseignant montre que, dans le tableau de nombres, la consigne correspond à un déplacement d'une ligne vers le bas et met en évidence la régularité du chiffre des unités des nombres obtenus. Ce sera ainsi l'occasion de faire le lien avec la numération.

De 100 en 100

Il s'agit de faire produire des listes de nombres à partir d'un nombre donné. Donner le nombre de départ, le pas + 100 et un nombre à ne pas dépasser, qui permettra aussi de tester la comparaison de deux entiers. Le maître met en évidence la régularité des chiffres des dizaines et des unités des nombres obtenus. Ce sera ainsi l'occasion de faire le lien avec la numération.

Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes

Ces exercices s'ajoutent à ceux proposés pour le CP, qu'il faut absolument refaire. Le maître continuera le travail de mémorisation des résultats des tables d'addition.

Sommes du type 38 + 55 (avec franchissement de la dizaine)

On restera strictement dans le champ numérique étudié et assimilé par les élèves.

Exemples : 94 + 8, 72 + 49.

Sommes du type 44 + 71 + 6

Le nombre à un chiffre sera choisi pour permettre une somme partielle facile.

Exemple : Dans 44 + 71 + 6 on additionnera d'abord 44 et 6.

Sommes du type 124 + 9

Il suffit de se reporter au cas précédent des additions du type 4 + 9.

Sommes du type 345 + 37

Dans ce cas, il faut isoler le chiffre des centaines et ne travailler que sur l'addition 24 + 37, selon la méthode décrite précédemment, puis ajouter le chiffre des centaines en prenant garde à l'éventuelle retenue.

Sommes du type 345 + 428

Dans ce cas, il est préférable de commencer par la gauche, donc d'ajouter d'abord les centaines, car cela donne immédiatement un ordre de grandeur acceptable de la somme. On est alors ramené au calcul d'une addition de deux nombres compris entre 10 et 99. Pour obtenir la somme, il suffit d'ajouter les deux résultats partiels obtenus séparément.

<u>Exemple</u> : Pour calculer 345 + 428, on additionnera d'abord 300 et 400, puis 45 + 28 :

- 300 + 400 = 700 ;
- 45 + 28 = 45 + 5 + 20 + 3 = 50 + 20 + 3 = 70 + 3 = 13 ;
- Donc : 345 + 428 = 700 + 73 = 773.

CE2

Dès le début d'année, le maître remettra en place les connaissances et les stratégies apprises au cycle 2, en proposant les exercices précédents à un rythme plus soutenu. Les exercices suivants viendront en complément.

Calculer mentalement des sommes

Sommes du type 718 + 25 (sans franchissement de la centaine supérieure)

On graduera les difficultés en jouant sur les retenues et d'éventuels 0.

<u>Exemples</u> : 563 + 20, 481 + 50, 252 + 13, 718 + 25.

Sommes du type 786 + 35 (avec franchissement de la centaine, sommes inférieures à 1000)

<u>Exemples</u> : 468 + 35, 236 + 82, 786 + 35.

Sommes du type 458 + 300

On donnera à calculer des sommes inférieures à 1 000.

Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental

Associer les nombres pour gagner en rapidité

Le maître proposera toute addition dans le champ numérique connu inférieur à 1000, du type 245 + 186 + 255. Il s'agit de trouver la stratégie d'association de deux nombres pour effectuer le calcul le plus simplement possible.

CM1

Dès le début d'année, il faut remettre en place les connaissances et stratégies apprises les années antérieures. Il est donc indispensable de proposer à nouveau les exercices précédents, à un rythme plus soutenu. Les exercices suivants viendront en complément. Au fur et à mesure de l'année, les nombres deviennent plus complexes. Il ne faut pas hésiter à en écrire au moins un sur les deux, comme on le fait pour les élèves en difficulté depuis le cycle 2. Les calculs sur les nombres décimaux se trouvent au chapitre consacré à ces nombres.

Estimer mentalement un ordre de grandeur d'un résultat

Trouver la dizaine entière la plus proche d'une somme du type 28 + 44

On jouera sur la difficulté que représentent la retenue, la présence du 0 et la proximité de 100.

Exemples : 42 + 1, 56 + 13, 11 + 29, 28 + 49, 37 + 30, 75 + 22, 77 + 24.

Trouver la centaine entière la plus proche d'une somme du type 435 + 56

On jouera sur la difficulté que représentent la retenue et la proximité d'une centaine.

Exemples : 120 + 46, 227 + 60, 310 + 80, 435 + 56, 268 + 41, 478 + 93.

Calculer mentalement des sommes

Sommes du type 314 + 205 (sans franchissement de la centaine)

On graduera les difficultés en jouant sur les retenues et d'éventuels 0.

Exemples : 440 + 210, 252 + 113, 442 + 300, 314 + 205, 718 + 125.

Sommes de deux nombres à trois chiffres (inférieures à 1 000)

On proposera toute somme de deux nombres à trois chiffres maximum dont le total est inférieur à 1 000.

Sommes de type 2 533 + 20 ou 2 533 + 200

On privilégiera le calcul mental sur des sommes très simples.

Exemples : 4 310 + 8, 2 533 + 20, 1 338 + 200.

Ordre de grandeur des sommes du type 2 530 + 8 ou 2 533 + 200

On privilégiera la recherche des valeurs approchées à la dizaine, la centaine ou le millier le plus proche sur des sommes très simples.

Exemples : 4 310 + 8, 2 533 + 20, 1 338 + 200.

CM2

Il n'y a pas de nouveauté au programme. Ce n'est que dans la complexité toute relative des calculs proposés que la différence se fait entre CM1 et CM2.