Notions mathématiques et didactiques pour l'enseignant

Ce que l'enseignant doit maîtriser à son niveau, ressources.

1. COMPRENDRE CE QU'EST UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITE

La découverte des situations de proportionnalité se situe dans le fil de l'étude des problèmes multiplicatifs : problèmes de multiplication, de division-partition (recherche de la valeur de la part) et de division quotition (recherche du nombre de parts).

Le problème « Un bidon peut contenir 3 litres d'eau. Combien d'eau peut-on stocker dans 5 bidons ? » est un problème de proportionnalité.
L'efficacité nous dicte d'inscrire l'apprentissage de la proportionnalité dans la continuité des problèmes multiplicatifs.

2. PROPORTIONNALITE ET NON PROPORTIONNALITE

Au cycle 3, on n'attend pas de l'élève qu'il identifie une situation de proportionnalité. L'enseignant doit cependant les caractériser lorsqu'il les présente.

Certaines situations canoniques doivent ainsi être mises en évidence :

- problèmes de prix : X objets coûtent N euros, combien coûtent Y objets ?
- problèmes de recettes : pour X personnes, il faut N …, combien faut-il pour Y personnes ?
- problèmes de consommation : pour parcourir X km, il faut N litres de carburant, combien faut-il de litres pour parcourir Y km ?
- problèmes de figures proportionnelles, d'échelles : sur la carte X cm représentent N km, combien représentent Y cm ? Ou X km sont représentés par N cm sur la carte, quelle est la longueur d'un segment de la carte représentant Y km ?

La compréhension de la notion nécessite de présenter également des situations de non proportionnalité et de donner un critère permettant de dire qu'il n'y a pas de proportionnalité. La règle du double[1] (s'il y a deux fois plus de la première grandeur, il y a deux fois plus de la seconde) peut constituer un critère intuitif simple à retenir et à appliquer.

Il sera particulièrement important d'identifier tôt des situations de non proportionnalité afin de désamorcer des obstacles connus, notamment la confusion courante entre les expressions « grandeurs proportionnelles » et « grandeurs liées », ou l'amalgame entre « proportionnalité » et « variation dans le même sens[2] ».

---

[1] Sous certaines conditions, ce critère suffit à établir la proportionnalité. Dans le cas d'une relation fonctionnelle entre deux grandeurs, si la fonction possède certaines propriétés (par exemple : dérivabilité et continuité de la dérivée), la propriété « pour tout x, $f(2x)=2f(x)$ » permet d'établir la linéarité de la fonction f.

[2] D'un point de vue mathématique, la première erreur consiste à considérer que toute fonction est linéaire, la deuxième que toute fonction croissante est linéaire.

Exemples de situation de non-proportionnalité :

- Hector a 9 ans et sa petite sœur a 3 ans. Hector dit à sa sœur : « Je serai toujours trois fois plus vieux que toi. » A-t-il raison ?
  Grandeurs liées mais pas de relation de proportionnalité ; dans un an Hector aura 10 ans et sa sœur en aura 4. Or 10 n'est pas le triple de 4.
  La grandeur « âge d'Hector » ne se déduit pas de la grandeur « âge de la sœur » par une multiplication mais par l'ajout de la différence d'âge constante.

- La taille d'un bébé et son âge (travail sur un carnet de santé).
  Grandeurs liées mais pas de proportionnalité ; le bébé ne double pas sa taille entre son premier et son deuxième anniversaire. La relation fonctionnelle entre les deux grandeurs « âge » et « taille » n'est pas linéaire.

- L'aire d'un carré et la longueur de son côté.
  Grandeurs liées mais pas de proportionnalité ; l'aire quadruple quand la longueur du côté double. La relation fonctionnelle entre les deux grandeurs existe, mais elle n'est pas linéaire, elle est du second degré.

3. SAVOIR CALCULER UNE QUATRIEME PROPORTIONNELLE

Au cycle 3 on peut se limiter à installer une procédure efficace pour résoudre les problèmes de calcul de quatrième proportionnelle[3]. La « règle de trois » est préconisée par le programme.

EXEMPLE :
Quatre places de cinéma coûtent 36 euros. Combien coûtent 7 places de cinéma ?
La procédure de règle de trois est une procédure efficace pour résoudre ce problème.
Afin de donner du sens à cette technique il est préférable de mettre en évidence le passage par l'unité.
On procède donc en deux étapes :

<u>Etape 1 :</u>
4 places coûtent 36 euros, donc une place coûte : 36 : 4 = 9 euros.
Il s'agit là de résoudre un sous-problème de division partition :
« Sachant que 4 places coûtent 36 euros, combien coûte une place ? »

<u>Etape 2 :</u>
Donc 7 places coûtent : 9 x 7 = 63 euros.
On répond à un deuxième problème, de multiplication :
« Sachant qu'une place coûte 9 euros, combien coûtent 7 places ? »

[3] Si on considère trois nombres non nuls a, b et c, il existe un nombre d tel que « c est à d comme a est à b », donc tel que les rapports a/b et c/d sont égaux. La recherche de ce nombre d est appelé recherche de la quatrième proportionnelle, c'est-à-dire du quatrième nombre qui établit une relation de proportionnalité entre les couples (a,b) et (c,d).

Au cycle 3, l'enjeu est l'acquisition de cet algorithme de résolution du problème par **décomposition en deux sous-problèmes** élémentaires relevant de capacités acquises lors des années antérieures, lors de l'exploration du champ des problèmes multiplicatifs.
L'expérience connue du puzzle de Brousseau (on demande aux élèves d'agrandir une figure de telle sorte que ce qui mesurait 2 cm sur figure initiale mesure 3 cm sur la figure finale) a montré la prégnance du modèle additif dans la résolution de problèmes. La décomposition systématique que nous proposons permet d'arrimer les problèmes de proportionnalité aux problèmes multiplicatifs.

Pour fixer la démarche, on peut proposer une présentation utilisant un tableau :

1 place	4 places	7 places
	36 euros	

Etape 1 :

1 place	4 places	7 places
36 : 4 =9 €	36 euros	

Etape 2 :

1 place	4 places	7 places
36 : 4 =9 €	36 euros	***9x7=63 €***

(L'étude des propriétés de ce tableau n'est pas un objectif du cycle 3.)

Remarque concernant la règle de trois :
Au milieu du vingtième siècle[4], la résolution de cet exercice aurait sans doute été la suivante :
Le prix de 7 places est : $\frac{36\times7}{4} = \frac{252}{4} = 63$.

Le produit est effectué avant la division afin de réduire les imprécisions qui résulteraient d'arrondis effectués lors de la division. [5]
Cependant le résultat du produit, 252, n'a pas de sens dans le cadre du problème. Il est donc préférable, à l'école, d'éviter d'automatiser ainsi la technique de la règle de trois. Cette procédure

[4]Nous ne nous attarderons pas sur l'étonnement des élèves de 1950 devant le prix des places de cinéma exprimé en euros…
[5] Si la division « ne tombe pas juste », son résultat sera arrondi, par exemple au dixième. Cette imprécision est ensuite multipliée par le multiplicateur.
Si on effectue d'abord la multiplication, celle-ci étant à coup sûr exacte, l'arrondi n'intervient que lors du dernier calcul et la perte de précision est limitée.

est, de toutes façons, appelée à être complétée ou remplacée au collège par d'autres manières de procéder, en particulier par le produit en croix à partir de la classe de quatrième.

4. LA DECOUVERTE DES PROPRIETES DE LINEARITE

L'étude de ces propriétés sera effectuée au collège.
On peut toutefois préparer leur découverte dès le cycle 3 en attirant l'attention des élèves sur des phénomènes qu'ils sont à même d'expliquer.
Reprenons l'exemple du problème des places de cinéma. Si l'enseignant demande ensuite de calculer le prix de 11 places, puis celui de 22 places… il pourra ajouter la consigne de trouver deux manières d'obtenir ces résultats. On attendra alors des élèves qu'ils emploient la procédure de retour à l'unité ou qu'ils utilisent les propriétés « de bon sens » : le prix de 11 places est la somme du prix de 7 places et du prix de 4 places, le prix de 22 places est le double du prix de 11 places.

Identification des connaissances à faire acquérir aux élèves

L'apprentissage de la proportionnalité occupe une place dans les programmes de mathématiques depuis le cycle 3 de l'école primaire jusqu'à la classe de quatrième. Cette étude est prolongée en troisième par l'introduction des fonctions linéaires.
Certains contenus des programmes du collège sont en lien direct avec la proportionnalité : étude des pourcentages, activités statistiques, tracés de graphiques, conversions, propriété de Thalès…
Parce qu'elles nous paraissent centrales dans la perspective de la construction des apprentissages de l'école au collège, nous limiterons ici le sujet aux questions suivantes : la compréhension du phénomène de grandeurs proportionnelles, l'acquisition d'une procédure efficace pour calculer une quatrième proportionnelle et la découverte progressive des propriétés qui permettront d'enrichir le répertoire de procédures pour résoudre les problèmes relevant de la proportionnalité.

1. LES PROGRAMMES

Programme de cycle 3 :

CM1 :
Utiliser un tableau ou la “règle de trois” dans des situations très simples de proportionnalité.

CM2 :
La proportionnalité est abordée à partir des situations faisant intervenir les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, d'agrandissement ou de réduction de figures. Pour cela, plusieurs procédures (en particulier celle dite de la “règle de trois”) sont utilisées.

En Sixième :
<u>Capacités :</u>
- Reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté :
- utilisation d'un rapport de linéarité, entier ou décimal,
- utilisation du coefficient de proportionnalité, entier ou décimal,
- passage par l'image de l'unité (ou « règle de trois »),
- *utilisation d'un rapport de linéarité, d'un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme de quotient.

<u>Commentaires :</u>
Les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs (quantités, mesures). Ils doivent relever de domaines familiers des élèves et rester d'une complexité modérée, en particulier au niveau des nombres mis en œuvre. Les rapports utilisés sont, soit des rapports entiers ou décimaux simples *soit des rapports exprimés sous forme de quotient.

En Cinquième

<u>Capacités :</u>

- Compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité, en particulier déterminer une quatrième proportionnelle.
- Reconnaître si un tableau complet de nombres est ou non un tableau de proportionnalité.

<u>Commentaires :</u>

Le travail sur des tableaux de nombres sans lien avec un contexte doit occuper une place limitée. Les activités numériques et graphiques font le plus souvent appel à des situations mettant en relation deux grandeurs.

Il est possible d'envisager, dans une formule, des variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur mais toute définition de la notion de fonction est exclue.

Les procédures utilisées pour traiter une situation de proportionnalité sont de même nature qu'en classe de Sixième.

L'usage du « produit en croix » est exclu en classe de Cinquième.

Pour les coefficients de proportionnalité ou les rapports de linéarité exprimés sous forme de quotient, on choisira des nombres qui évitent des difficultés techniques inutiles. En particulier les quotients de nombres décimaux ne sont pas exigibles.

En Quatrième

<u>Capacités :</u>

- Déterminer une quatrième proportionnelle.

<u>Commentaires :</u>

Aux diverses procédures déjà étudiées s'ajoute le « produit en croix » qui doit être justifié.

2. LE SOCLE COMMUN

La grille de référence du palier 2 précise les attendus relatifs à la proportionnalité.

L'énoncé permet à l'élève de comprendre aisément le but du problème.

Les situations proposées ont du sens pour l'élève. Elles peuvent provenir d'autres disciplines.

L'énoncé du problème doit :

- contenir les éléments qui permettent d'inférer la proportionnalité ;
- permettre d'identifier et d'extraire directement les trois valeurs nécessaires au calcul de la quatrième proportionnelle.

Il est attendu de l'élève qu'il parvienne :

- à identifier et à extraire ces trois valeurs ;
- à calculer la quatrième proportionnelle par la méthode de son choix.

L'utilisation d'un tableau de proportionnalité est possible mais le tableau n'est pas donné a priori et doit être construit par l'élève.