LA DIVISION DANS LES ENTIERS NATURELS

par Roger Bastien

◆ 1. ASPECT THÉORIQUE DU PROBLÈME

Le terme diviser peut revêtir au moins deux sens distincts : séparer en plusieurs parties, désunir, disjoindre (sens commun) et partager en parties égales (sens mathématique). Le passage du sens commun au sens mathématique pose problème à un grand nombre d'élèves du Cycle 2 et encore au Cycle 3.

Le sens mathématique : « diviser c'est séparer en parties égales » ou « diviser c'est la réciproque de multiplier » est donc le point central de ce sujet.

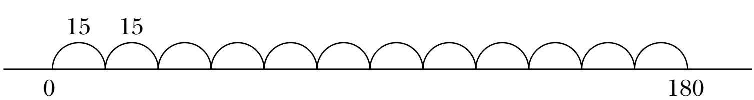
Aspect fonctionnel de la division

Voici un exemple qui permettra de saisir les stratégies mises en œuvre (stratégies expertes) :

Combien de bonds de 15 cm seront nécessaires à la grenouille pour parcourir une distance de 180 cm ?

Deux procédés sont utilisables :

on procède à partir de 0 par ajouts successifs de 15 cm jusqu'à obtenir 180 cm

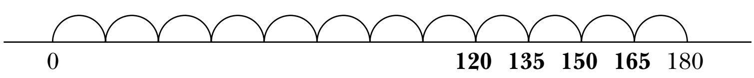


(((((((((15+15)+15)+15)+15)+15)+15)+15) + ... + 15) = 180

(on devrait écrire 12 fois l'élément 15)

ce qui se traduit par une réflexion sur les multiples successifs de 15, la table est reprise jusqu'à 15 × 12, 12 est le douzième multiple de 15 ;

ou à partir de a, on procède par retraits successifs de b pour obtenir 0



180 – 15 = 165 165 – 15 = 150 150 – 15 = 135 etc.

ce qui se traduit par 12 est le nombre de retraits successifs de bonds de 15 cm, 12 est le quotient de 180 : 15

De cet exemple on peut tirer la généralisation suivante :

soit un entier naturel *b*, on construit la famille de ses multiples. Si a est un autre entier naturel
deux cas peuvent se présenter :

- a est un multiple de b alors $a = bq$; on effectue la division exacte de a par b, on dit que b est le quotient exact de a par b
  exemple : $72 = 9 \times 8$

- a n'est pas un multiple de b, il se situe entre deux multiples consécutifs de b
  $bq < a < b(q + 1)$
  alors $a = bq + r$ avec $0 < r < b$
  exemple : $83 = 10 \times 8 + 3$

De ces deux généralisations on tire le principe général de la division euclidienne :
$a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$ ou $bq \leqslant a < b\ (q + 1)$
exemple : $25 \times 12 \leqslant 307 < 25 \times 13$
25×12 et 25×13 sont deux multiples consécutifs de 25

Cependant, rien n'empêche d'exprimer a à partir d'un multiple quelconque de b qui n'est pas nécessairement le plus proche, on aura alors $a = bq' + r'$ avec r' non compris dans l'intervalle $[0, b[$, r' pouvant être négatif. On parle alors de division non euclidienne.

Attention, on parlera alors *d'une* division non euclidienne et non *de la* division non euclidienne car, au contraire de la division euclidienne, cette dernière n'est pas unique.
Exemple :
Dans un jeu de 52 cartes, on distribue des cartes aux 4 joueurs et l'on souhaite qu'il reste un talon; donnez plusieurs solutions possibles.
On écrit alors :
$52 = 4 \times 8 + 20$ ici le reste est supérieur au diviseur 4
$52 = 4 \times 10 + 12$
$52 = 4 \times 12 + 4$
(ce ne sont que 3 solutions parmi l'ensemble des possibilités)

Attention au problème théorique suivant :

$45 = 8 \times \underline{\mathbf{4}} + \mathbf{5}$ ne représente pas une division euclidienne car $\mathbf{5} > 4$
mais $45 = 4 \times \underline{\mathbf{8}} + \mathbf{5}$ représente une division euclidienne car $\mathbf{5} < 8$
C'est pourquoi on présente la division comme non commutative bien que la forme ici présentée laisserait supposer que l'on peut permuter 8 et 4.

Il suffit de poser alors l'opération de façon classique :
45 : 4 =   45 : 8 =
pour s'apercevoir qu'il s'agit de 2 opérations distinctes.

◆ 2. DONNER DU SENS À L'OPÉRATION

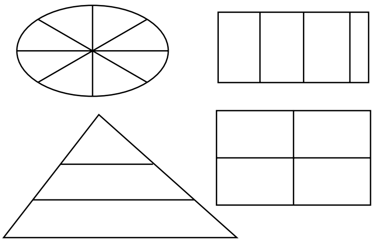
Pour se rapprocher des différents sens possibles (partage => soustractions itératives ou opérateur), il faut se reporter aux Instructions Officielles :

Opérations / Niveau	+	−	×	:
GS	Approche	Approche	Approche	Approche
CP	Approche technique	Approche	Approche	Approche
CE1	Approche technique	Approche technique	Approche technique	Approche
CE2	Renforce -ment	Approche technique	Approche	Approche
CM1	Renforce -ment dans N Approche dans D	Renforce -ment dans N Approche dans D	Renforce -ment dans N Approche dans D	Approche -ment dans N Approche dans D
CM2	Renforcé dans D	Renforcé dans D	Renforcé dans D	Approche dans D
6^{e}				2 décimaux

Ainsi la notion de partage doit apparaître sous des formes manipulatoires dès la grande section.
Exemple :
Il y a 9 roseaux dans un étang et deux hommes veulent faire des bouquets égaux ; combien chacun coupera-t-il de roseaux ?

La réponse quatre et un roseau ne sera pas pris. (Jeu de correspondances termes à termes 1 puis 1 autre, puis 1 autre…)

Au niveau CP, faire apparaître la notion de parts égales :



Voici la découpe que maman a faite pour 4 gâteaux.
Est-ce que toutes les parts sont égales pour chacun des gâteaux ?
Dans quels gâteaux les parts sont elles égales ?
Dans quels gâteaux les parts sont elles inégales ?

Il s'agit ici de la notion de division : partage en parties égales

- *Voici un jeu de 52 cartes, peux-tu en distribuer 5 aux 6 joueurs ? Fais-le.*
- *Voici un jeu de 52 cartes, peux-tu en distribuer 6 aux 6 joueurs ? Fais-le.*
- *Voici un jeu de 52 cartes, peux-tu en distribuer 7 aux 6 joueurs ? Fais-le.*
- *Voici un jeu de 52 cartes, peux-tu en distribuer 8 aux 6 joueurs ? Fais-le.*
- *Voici un jeu de 52 cartes, peux-tu en distribuer 9 aux 6 joueurs ? Fais-le.*

Afin d'installer de façon implicite des problèmes qui ne se résolvent pas uniquement par l'addition. Ici la distribution fait apparaître l'algorithme $a - bq = r$

Au CE1 :

Travail sur la notion de double et de moitié.

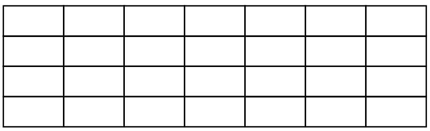
Travail sur la notion de triple et de tiers.

Les exercices qui seront proposés amènent l'enfant à se positionner sur $a = 2q$; $a = 3q'$, mais aussi sur les restes possibles en cherchant la moitié ou le tiers d'une quantité.

Exemple : *Je possède un paquet de 14 billes et je veux en donner autant à Marie, Pierre, Julien combien de billes pourra recevoir chaque enfant ?*

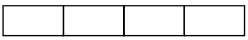
Au CE2 :

La multiplication s'installe progressivement, il est donc possible de jouer sur les nombres rectangles :



$7 \times 4 = 28$

et



$4 \times ? = 28$

qui amènent directement à la notion de division exacte et de réciprocité entre multiplication et division.

◆ 3. LES TECHNIQUES UTILISÉES PAR LES ÉLÈVES POUR RÉSOUDRE UN PROBLÈME PORTANT SUR LA DIVISION

A) INTRODUCTION

Pour que la notion de division apparaisse, il est nécessaire qu'un obstacle, ou une contrainte forte soit à surmonter : ici il est nécessaire de travailler sur un dividende et un diviseur ne permettant pas des calculs rapides ou des solutions instantanées.

Cependant, pour que l'opération se réalise, il est nécessaire que le pli soit concret et que la valeur cherchée soit du domaine de la connaissance réelle de l'élève.

B) 1er EXEMPLE

Une colonie de vacances achète du pain pour les enfants : le boulanger, après avoir fait une remise, envoie une facture de 500 F pour l'achat de 76 pains. Le directeur voudrait connaître le prix d'un pain. Peux-tu l'aider ?

Il est nécessaire de faire oraliser les élèves ou de leur faire écrire les solutions et ce que représentent les nombres mais aussi les algorithmes opératoires.

Méthodes employées par les élèves

a) Méthode additive
$76 + 76 = 152$
$152 + 76 = 228$
$238 + 76 = 304$
$314 + 76 = 380$
$390 + 76 = 456$
$456 + 76 = 532$
Donc le pain coûte 6 F (pour certains) et 7 F (pour la plupart).
Demander aux élèves ce que représentent les 6 ou 7 additions posées (problème du sens concernant le prix de 1 pain)
on peut alors écrire
$500 = 76 \times 6 + 44$ un pain coûte alors plus de 6 F
$532 = 76 \times 7$ un pain coûte moins de 7 F

b) Méthode soustractive

$500 - n \times 76$

$500 - 76 = 424$

$424 - 76 = 348$

$348 - 76 = 272$

$272 - 76 = 196$

$196 - 76 = 120$

$120 - 76 = 44$

récapitulatif : $500 - 76 \times 6 = 44$

c) Méthode mixte

$76 + 76 = 152$

$152 \times 2 = 304$

$152 \times 3 = 456$

$500 - 456 = 44$ Donc le prix d'un pain est compris entre 6 et 7 francs.

d) Méthode intuitive

(par essai prédisant la réponse jusqu'à trouver la bonne réponse)

$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 +$ (76 fois)

$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 +$ (76 fois)

cette solution revient à poser de fait :

si un pain coûtait 1 F; 76 pains coûteraient 76 F

si un pain coûtait 2 F; 76 pains coûteraient 152 F

si un pain coûtait 3 F; 76 pains coûteraient 228 F

etc.

C) 2e EXEMPLE

Mise en évidence d'un modèle moins primitif permettant une économie d'écriture :

Avec un sac de 1 000 billes, combien de sacs de 12 billes peut-on créer ?

À côté des procédures très longues (82 itérations additives ou soustractives) apparaissent deux modèles plus technicistes.

Un modèle très élaboré

$12 \times 20 = 240$

$12 \times 30 = 360$

$12 \times 60 = 7\,201$

$12 \times 80 = 960$

$12 \times 90 = 1\,080$

Donc plus de 80 paquets et moins de 90.
Problème : passage au nombre 83. Aide obligatoire du maître ou d'un camarade ayant compris le principe.
Si l'on fait 80 paquets, combien restera-t-il de billes?
Comment faire encore des paquets?

Un modèle posant problème car intuitif

$12 \times 10 = 120$
$12 \times 30 = 360$
$12 \times 55 =$
$12 \times 80 =$
$12 \times 85 =$
$12 \times 81 =$
$12 \times 82 =$
$12 \times 84 =$
$12 \times 83 =$

> Succession de multiplications dont le produit multiplicateur n'est pas clairement identifié comme ayant un sens précis : nombre de paquets.

De ces exercices, il faut retenir :

a) si les nombres sont grands (mais ne présentant pas trop de difficultés avec les retenues), les élèves peuvent évoluer de procédures additives ou soustractives à des procédures par encadrements plus fiable et plus économiques;

b) si les valeurs numériques sont plus faibles = évolution impossible pour l'élève.

Le passage de procédures additives à soustractives (ou réciproquement) semble quasi impossible pour les élèves. Ces deux procédures sont relativement incompatibles lors de la perception de la mise en œuvre : plus on distribue de cartes ⇒ moins il en reste à distribuer (les nombres n'ont pas d'équivalences au niveau valeurs (nombre de fois et reste).

D) Les techniques

2 principes généraux :

A/ Soit par connaissance des tables de multiplication, des additions et soustraction ainsi que par la connaissance du système de numération

$$\begin{array}{r|l} 9\,3\,1\,8 & 27 \\ \cline{2-2} -\,8\,1 & 3 \\ 1\,2\,1 & \\ -\,1\,0\,8 & 4 \\ 1\,3\,8 & \\ -\,1\,3\,5 & 5 \\ 3 & \end{array}$$

Problème posé :
a) utilisation du nombre à partir du chiffre le plus à gauche (alors que $\times$, $+$, $-$ partaient à droite dans N, de la virgule dans D).

b) encadrement par 2 multiples de 27.
$9 \rightarrow$ entre 0 et 1
$0 \times 27 < 9 < 1 \times 27$

qui se traduit par :

$$\begin{array}{r|l} 9318 & 27 \\ \cline{2-2} 121 & 345 \\ 138 & \\ 3 & \end{array}$$

c) passage à l'unité directement inférieure
$937 \times 27 < 121 < 4 \times 27$

d) abaissement de l'unité directement inférieure et prise en compte pour l'encadrement du nombre formé 121

$4 \times 27 < 121 < 5 \times 27$
$4 \times 27 = 108$

e) encadrement du dernier nombre 138
$5 \times 27 < 121 < 6 \times 27$
$5 \times 27 = 135$

Erreurs potentielles :
Erreurs dans les encadrements

$$\begin{array}{r|l} 9318 & 27 \\ \cline{2-2} -\ 54 & 2 \\ \cline{1-1} 39 & \end{array}$$

$2 \times 27 = 54$
$391 \rightarrow 9 \times 27$ car 9 est le chiffre maxi ou 14×27

Donc 2 types possibles de réponses :
9318 : 27 a pour quotient 299999991 reste 30
9318 : 27 a pour quotient 2145 reste 30

Aides à apporter :
Faire la preuve de la division par approximation.

2145 voisin de 2000
27 voisin de 20 ou 30
} le produit sera compris entre 40000 et 60000; or ici, on a 9318

Puis montrer que le reste doit toujours être inférieur au diviseur.

→ *Erreur dans les tables de multiplication :* les faire poser en regard de l'opération et en vertical.

→ *Erreur dans les soustractions :* les faire poser dans la division.

→ *Erreur dans le corps de la division* (env. 8% des copies relevées).

$$\begin{array}{r|l} 4758 & 19 \\ \cline{2-2} 95 & 25 \\ 0 & \end{array}$$

Le rôle ambigu du 0 (reste partiel)
Le reste partiel étant de 0, l'opération est jugée achevée.

$$\begin{array}{r|l} 20398 & 19 \\ \cline{2-2} 13 & 1000 \\ 9 & \\ 8 & \end{array}$$

Rôle ambigu du 0 au quotient
0 se conduit comme élément absorbant et donc rend le reste nul.

B/ Soit par la pause des tables de multiplication :

$18\times0=0$
$18\times1=18$
$18\times2=36$
$18\times3=54$
$18\times4=72$
$18\times5=90$
$18\times6=108$
$18\times7=126$
$18\times8=144$
$18\times9=162$

$$\begin{array}{r|l} 3805 & 18 \\ \cline{2-2} -\ 3600 & 200 \\ \cline{1-1} 205 & \\ -\ 180 & 10 \\ \cline{1-1} 25 & \\ -18 & 1 \\ \cline{1-1} 1 & \boxed{211} \end{array}$$

D'où simplification des calculs, le produit n'étant calculé qu'une fois.

◆ 4. POUR UNE DÉMARCHE POSSIBLE

A) VERS L'ORDRE DE GRANDEUR

Comparer $21:7=3$
$210 : 7=30$
$2100:7=300$
$21000 : 7=3000$

Si on multiplie le dividende par 10, 100, 1000, le quotient est $\times$ par 10, 100, 1000

3400 : 7 le nombre de chiffres du quotient sera-t-il de 1, 2, 3 ou 4?

$7\times1=7$
$7\times10=70$
$7\times100=700$ ********
$7\times1000=7000$ *******

Donc 3 chiffres au quotient

Cette notion rejoint alors la remédiation possible de la division (cf. erreurs potentielles)

B) VERS L'ENCADREMENT PAR 2 MULTIPLES

3400 :7 on sait que le quotient possède 3 chiffres car :
$100\times7=700$
$200\times7=1400$
$300\times7=2100$
$400\times7=2800$ ***
$500\times7=3500$ ***

Dans le nombre sera compris entre 400 et 500

c) Pose opératoire de la division

Ma préférence, pour des raisons à la fois de cohérence dans la démarche et afin d'éviter toute surcharge cognitive va à la méthode plus simple à mettre en œuvre et évitant un grand nombre d'écueils.

Roger BASTIEN