

LES CARTES À POINTS : POUR UNE MEILLEURE PERCEPTION DES NOMBRES

par Jean-Luc BRIGEON
professeur formateur
à l'IUFM d'Auvergne

◆ LE PROBLÈME DE LA REPRÉSENTATION DES NOMBRES

On ne conçoit pas un premier enseignement des nombres à l'école maternelle et au cycle 2 qui évacue une figuration spatiale des nombres, au risque d'en donner une perception trop abstraite et insignifiante. Bien entendu, l'enfant est fréquemment invité à manipuler des collections diverses qu'il va comparer et compter, en les organisant à sa guise, se construisant ainsi un bagage consistant de compétences numériques. Mais ces collections n'ont pas, par leur nature, d'organisation prédéfinie, ce qui leur interdit, dans la plupart des cas, de laisser une trace visuelle de la quantité correspondante.

La question du choix des représentations des nombres, à des fins d'apprentissage, doit donc être abordée en ayant à l'esprit la question sous-jacente : comment donner aux enfants des images mentales des premiers nombres qui soient potentiellement riches en propriétés et en possibilités de conceptualisation ? L'expression « image mentale » correspond ici à l'idée de représentation analogique, c'est-à-dire que l'enfant voit d'abord réellement la collection puis se la représente à l'identique dans sa tête (c'est en quelque sorte une « photographie mentale »). Différentes pratiques existent déjà à l'école, que nous allons rappeler en nous appuyant sur les représentations usuelles du nombre 7.

1. AVEC LES CONSTELLATIONS DES DÉS



On peut remarquer qu'on privilégie une décomposition parti-
culière dans la représentation du nombre 7 et que « un de plus
que six » n'apparaît pas directement dans la représentation de
droite. Par ailleurs, la propriété « sept n'est pas un double » n'est
pas mise en évidence et la relation fondamentale à « dix » est
ignorée¹.

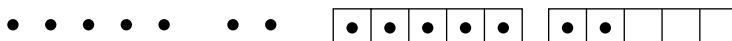
1. Cette manière de représenter les nombres par les constellations des dés est très fréquemment utilisée. Il ne s'agit pas ici de la dévaloriser mais simplement d'en montrer les limites.

Enfin, d'une manière générale, la représentation de nombres supérieurs à 10 avec ces constellations devient rapidement délicate. On notera aussi que la représentation de 10 apparaît comme un groupement de deux fois 5 unités :



et non pas comme un groupement nouveau de 10 unités, ce qui ne donne pas à la notion de dizaine toute l'importance qu'elle mérite.

2. SOUS UNE FORME LINÉAIRE



Là encore, on privilégie une décomposition particulière dans la représentation du nombre, la propriété « sept n'est pas un double » n'est pas mise en évidence et la relation fondamentale à « dix » est ignorée dans la disposition de gauche.

Le fait le plus important est que la disposition linéaire choisie ne favorise pas la vision globale, en raison du dépassement de l'empan visuel ordinaire.

3. AVEC LES DOIGTS



Le lecteur averti remarque que, encore une fois, on privilégie une décomposition particulière dans la représentation du nombre et que la propriété « sept n'est pas un double » n'est pas mise en évidence.

Cette forme de représentation des nombres, qui a des avantages évidents, a aussi des limites : la manipulation des nombres est parfois délicate (lorsqu'il faut les deux mains) et, bien sûr, la représentation de nombres supérieurs à 10 est difficile.

◆ LES REPRÉSENTATIONS ET LES IMAGES MENTALES

1. QU'EST-CE QU'UNE REPRÉSENTATION ?

L'activité de représentation est liée à la fonction symbolique, c'est-à-dire à cette forme de l'activité humaine consistant à produire des symboles qui « valent pour » les objets concernés.

« Il y a activité de représentation lorsqu'un objet ou lorsque les éléments d'un ensemble d'objets se trouvent exprimés, traduits, figurés, sous la forme d'un nouvel ensemble d'éléments, et qu'une correspondance systématique se trouve réalisée entre l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. » (M. Denis, 1989²)

2. Denis M., *Image et cognition*, Paris, PUF.

Producteur de symboles, l'être humain crée deux types de représentations :

- Des représentations qui laissent des traces matérielles de type iconographique ou pictural, extérieures à l'individu qui les a produites. Ces signes existent depuis les temps préhistoriques et ont trouvé des formes très élaborées dans l'écriture et les chiffres. Notre société moderne regorge de ces symboles associés à une situation, une action, un organisme :



- Des représentations mentales de nature cognitive. La nature de ces représentations est développée dans les lignes suivantes.

2. QUELLES SONT LES FONCTIONS DES REPRÉSENTATIONS ?

Qu'elles soient matérielles ou mentales, les représentations ont diverses fonctions dont nous retiendrons principalement les suivantes :

- conserver l'information amenée à se détériorer et dont l'accès nous sera progressivement rendu difficile par la suite. C'est le rôle, par exemple, des photographies (familiales ou touristiques).
- rendre accessibles des informations qui ne le sont pas dans les conditions normales, « naturelles », de perception : c'est le cas, par exemple, des schémas de câblage d'un appareil électronique.
- expliciter de l'information: à ce titre elles sont susceptibles de remplacer les objets originaux pour effectuer certaines fonctions, principalement de nature cognitive.

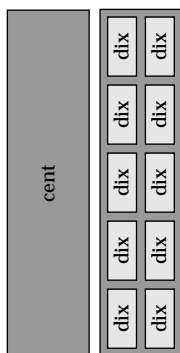
3. QUELLES SONT LES REPRÉSENTATIONS MENTALES ?

Les activités cognitives sont régies par deux modes de représentation symbolique :

- un système de représentations mentales verbales ou propositionnelles lié au langage. Le langage naturel permet de représenter une grande variété de faits de nature différente et nous avons tous eu l'expérience de penser « en paroles ».

3 En première approximation, nous appellerons ici modèle une représentation figurative épurée, c'est-à-dire qui ne conserve que les propriétés essentielles, « modélisées », de l'objet considéré.

4 Pour les élèves de la fin du cycle 2 (CE1), dans le cadre de l'étude des nombres supérieurs à 100, il est également possible de créer des cartes « cent » :



5. Les cartes à points transparentes peuvent être réalisées facilement par photocopie, en utilisant des transparents spéciaux dont l'usage est assez courant.

6. Le fonctionnement de la table à calcul est expliqué plus loin.

- un système de représentations mentales analogiques (c'est-à-dire figuratives et non discursives) lié à l'expérience perceptive de notre environnement. Elles conservent les propriétés structurales des objets représentés. Ce sont ces représentations que nous appellerons les images mentales.

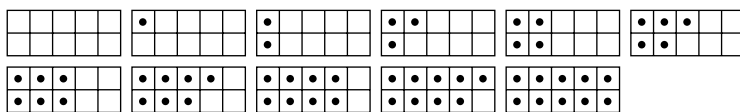
4. LES IMAGES MENTALES

Une image mentale est donc une forme spécifique de représentation mentale, de type analogique. « [L'image mentale], par les propriétés structurales qu'elle hérite de la perception, est un instrument cognitif permettant à l'individu d'effectuer des calculs, des simulations, des inférences, des comparaisons sans devoir recourir à des systèmes calculatoires formels » (M. Denis, 1989).

L'image mentale a les propriétés d'un modèle³. Les propriétés spatiales des objets sont conservées : forme, positions relatives des éléments, propriétés topologiques, caractère continu des déplacements et des transformations, distances. De plus, l'individu peut simuler des processus physiques s'appliquant aux objets perçus (par exemple, des déplacements spatiaux).

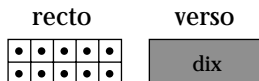
◆ LES CARTES À POINTS

Le matériel de base des cartes à points est constitué des 11 grilles suivantes :



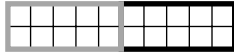
Ces cartes se présentent sous deux formes : une forme cartonnée et une forme transparente.

Pour permettre une étude de la numération, des cartes « dix » en nombre suffisant, sous forme cartonnée, sont rajoutées. Selon l'âge des

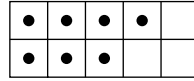


enfants et la période d'apprentissage, on peut utiliser exclusivement le recto de ces cartes « dix » ou bien le recto et le verso⁴.

En outre, afin de faciliter le calcul sur les premiers nombres au cycle 2, particulièrement au CP, les cartes à points transparentes⁵ peuvent être construites. Elles sont destinées à être disposées sur une table à calcul⁶ constituée de deux grilles accolées de 10 cases, la première étant encadrée en rouge (en gris dans cet article).



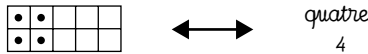
Si on reprend un à un les points développés précédemment sur la représentation du nombre 7, on constate qu'aucune décomposition n'est privilégiée et que toutes sont mobilisables, «sept» apparaît comme «six plus un», la propriété «sept n'est pas un double» est bien mise en évidence, la relation à dix est permanente du fait de la présence de la grille. En outre, la vision globale est facilitée et la représentation des nombres supérieurs à 10 est simple.



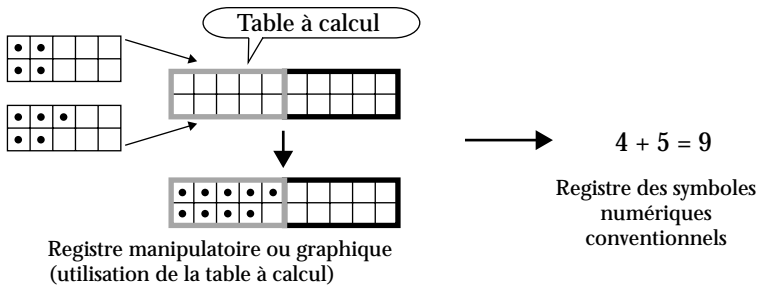
Comme on le voit, ces cartes sont très structurées. Tout en conservant une approche visuelle et concrète des nombres, elles approchent les aspects abstraits de la numération, objet de toutes les préoccupations des enseignants au cycle 2.

Dans le processus de construction de représentations et d'images mentales numériques, à l'école maternelle et au cycle 2, les cartes à points jouent plusieurs rôles importants : codage et communication ; traitement des informations ; mise en évidence des propriétés des nombres ; aide à la mémorisation ; aide à la construction de la numération.

1. Un rôle de **codage et de communication** des informations numériques. Une information numérique simple peut être codée sous la forme d'une carte à points et peut être ainsi facilement communiquée :

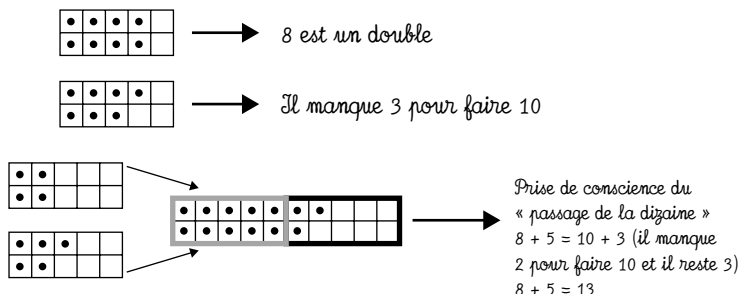


2. Un rôle de **traitement des informations**, offrant des possibilités d'illustration et d'explication visuelle, en passant du registre manipulateur ou graphique au registre des symboles numériques conventionnels.



Le passage des opérations matérielles aux opérations mentales est ainsi facilité.

3. Un rôle de mise en évidence des propriétés des nombres favorisant chez les élèves une prise de conscience de ces propriétés (objectivation).



4. UN RÔLE D'AIDE À LA MÉMORISATION

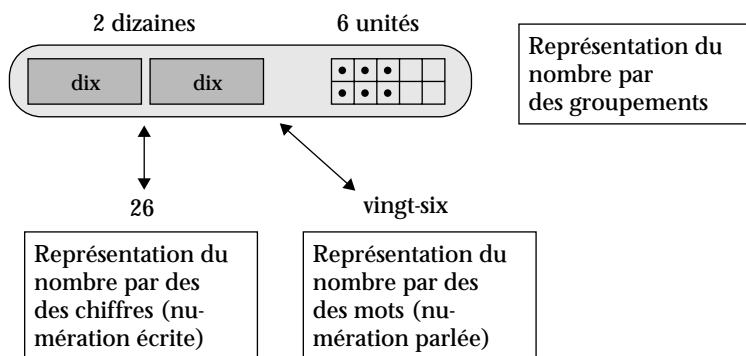
Les cartes à points, par les images mentales qu'elles permettent de construire, facilitent la récupération rapide et au moindre coût des résultats numériques stockés en mémoire à long terme. C'est le cas pour les doubles et les amis de 10⁷.

7. On appelle ici « amis de 10 » les couples de nombres dont la somme est égale à 10. Par exemple, 2 et 8 sont des « amis de 10 ».

5. UN RÔLE D'AIDE À LA CONSTRUCTION DE LA NUMÉRATION DES ENTIERS

Il devient en effet possible de représenter facilement un nombre supérieur à 10 en mettant en évidence les dizaines, c'est-à-dire en incitant les élèves à dénombrer non plus seulement unité par unité, mais aussi en utilisant une nouvelle « unité de compte » : la dizaine.

Cette perception des groupements est à la base de notre système de numération écrite et lui donne du sens :



L'ensemble des arguments exposés ici invite à faire de ces cartes à points, représentations matérielles modélisées des collections, **une pratique pédagogique de référence** pour les activités numériques tout au long du cycle 1 et du cycle 2. Cela est d'autant plus profitable que ce matériel des cartes à points, sous une forme enrichie, peut être utilisé au CE1, avec des cartes «cent». Il faut signaler que cette position en faveur des cartes à points n'élimine aucunement le recours ponctuel aux autres représentations courantes des nombres.

◆ L'UTILISATION PÉDAGOGIQUE DES CARTES À POINTS⁸

Deux types d'utilisation apparaissent avec ce matériel :

- pour l'étude des nombres et de la numération, on utilise de préférence les cartes à points cartonnées.
- pour les calculs sur les nombres, on utilise de préférence les cartes à points transparentes et la table à calcul.

1. ÉTUDE DES NOMBRES ET DE LA NUMÉRATION

Dans ce cadre, les principales utilisations sont les suivantes :

- faciliter la reconnaissance visuelle immédiate des premiers nombres, sans comptage, et leur représentation (construction d'une image mentale des premiers nombres).
- faire apparaître les propriétés des nombres : chaque nombre est «un de plus» que le nombre qui le précède, certains nombres sont des doubles (les cartes correspondantes ont deux rangées de points égales).
- faire repérer le complément à 10 d'un nombre inférieur à 10, par simple observation des cartes.
- faire percevoir la notion de dizaine et faire construire des nombres en utilisant les dizaines et les unités. Ainsi, pour construire le nombre 24 avec ses cartes à points, l'élève prend deux cartes «dix» et la carte 4.
- faciliter la perception de la somme de deux nombres quelconques et aider à la construction de la technique opératoire de l'addition.

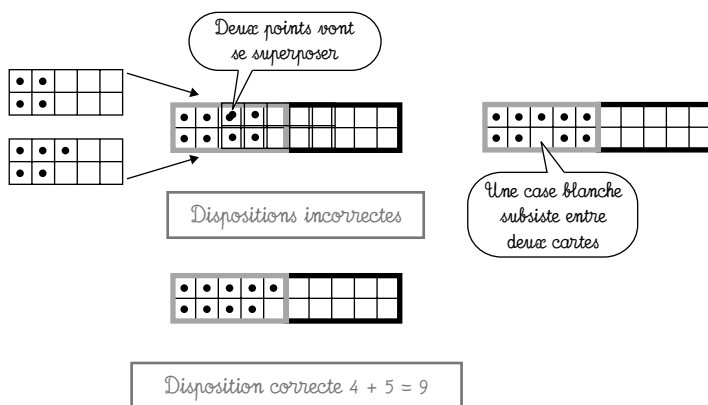
2. CALCULS SUR LES NOMBRES

Pour ces activités, le matériel à utiliser en priorité est constitué des cartes à points transparentes et de la table à calcul.

8. Les exemples d'activité décrits ci-dessous ont fait l'objet d'une expérimentation dans des classes de cycle 1 et de cycle 2 du département de l'Allier. Je tiens à remercier les enseignants qui ont collaboré à ce travail.

L'intérêt des cartes à points transparentes est que deux cartes quelconques peuvent être superposées afin de visualiser la somme de deux nombres. Pour faciliter cette manœuvre, il est conseillé de l'effectuer sur la table à calcul, en respectant soigneusement les règles suivantes :

- les cases de deux cartes peuvent être superposées, à condition que l'une au moins soit vide. On ne peut pas placer l'une sur l'autre deux cases qui ont chacune un point.
- on ne laisse pas de case vide entre deux cartes.
- on s'efforce de remplir en premier la grille entourée en rouge (en gris dans cet article), en commençant par la gauche.



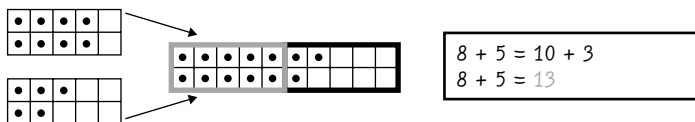
Les cartes peuvent être retournées et disposées dans l'ordre qu'on souhaite, conformément à la propriété de commutativité de l'addition. Ainsi, la somme $5 + 4$ doit être interprétée de la manière suivante :

- on prend les deux cartes 5 et 4
- on les dispose pour respecter les règles précédentes. Cela veut dire qu'on place d'abord la carte 4, puis la carte 5.
- on observe le résultat : $5 + 4 = 9$

Les principales utilisations de ces cartes transparentes, avec la table à calcul, sont les suivantes :

- faire percevoir et calculer la somme de deux ou plusieurs nombres en ne se contentant pas d'écritures mathématiques formelles.
- favoriser la décomposition d'un nombre en une somme de deux ou plusieurs nombres.
- faire repérer des résultats numériques importants (par exemple, le double d'un nombre) et donner un sens à des techniques de calcul réfléchi (par exemple, le calcul d'un presque double en utilisant le double voisin).

- montrer le rôle fondamental de la dizaine dans les calculs et la méthode du passage par 10 :

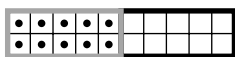


Pour expliciter complètement le passage de la dizaine, cette action peut être décomposée de la manière suivante :

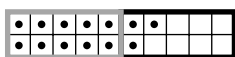
1. on met d'abord la carte 8 sur la table à calcul :



2. il manque 2 pour faire 10. On pose donc la carte 2 :

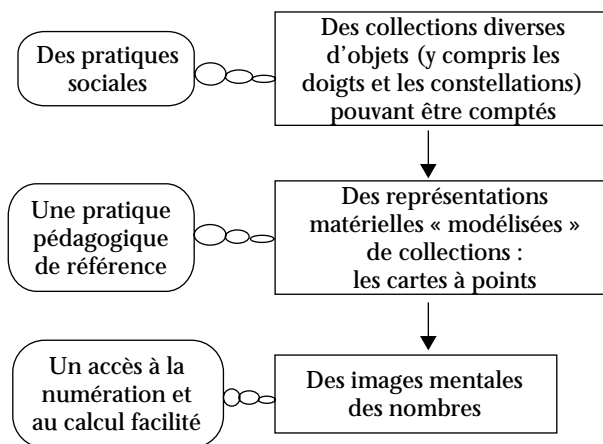


3. pour obtenir 5, il faut encore la carte 3 qu'on place maintenant :



◆ LA PLACE DES CARTES À POINTS DANS LES PRATIQUES NUMÉRIQUES

Pour conclure, la place des cartes à points peut être résumée sur le schéma suivant :



Le statut des cartes à points en tant que pratique pédagogique de référence, dans le but de faciliter chez les enfants la compréhension de la numération et du calcul, correspond tout à fait aux stratégies que l'enseignant construit pour ses élèves. Ainsi, l'enfant devient plus familier avec les nombres.

Jean-Luc BREGEON

professeur formateur à l'IUFM d'Auvergne

e-mail : jl.bregeon@wanadoo.fr

site : <http://perso.wanadoo.fr/jean-luc.bregeon>

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Denis, *Image et cognition*, PUF, 1989
2. *Voies Libres*, n° 32, janvier 2001, éditions Nathan.
Les cartes à points : une nouvelle pratique pédagogique pour mieux construire les nombres.
3. *Millemaths CP et CE1*, éditions Nathan (2001 et 2002) : fichier de l'élève et livre du maître. Une nouvelle méthode de Mathématiques au CP et au CE1. A paraître : GS (2003).
4. *Cédérom Millemaths CP*, éditions Nathan (2001). Une pratique des cartes à points en relation avec l'ordinateur afin de comprendre la numération et le calcul. Une utilisation en GS est possible en raison de la diversité des modules.