Fractions et décimaux

Position du problème en classe

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

- Les enquêtes internationales PISA et TIMMS mettent en évidence régulièrement un important retard des élèves français en mathématiques.

- En mathématiques, la France se classe en dernière place en Europe.

- En France 59% du temps est consacré aux fondamentaux

- Contre 37% dans les autres pays de l'OCDE

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

Clique sur **toutes** les fractions supérieures à $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{12}$

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

ME02_03	**France 7 % - Europe 21 % - International 22 %**
Domaine de contenu	Nombre
Domaine cognitif	Connaître
Description	Parmi 6 fractions simples , sélectionner celles qui sont supérieures à 1/2.

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

Juliette va chez sa grand-mère à vélo. Elle a parcouru $\frac{3}{8}$ du chemin.

Quelle fraction de la distance lui reste-t-il à parcourir ?

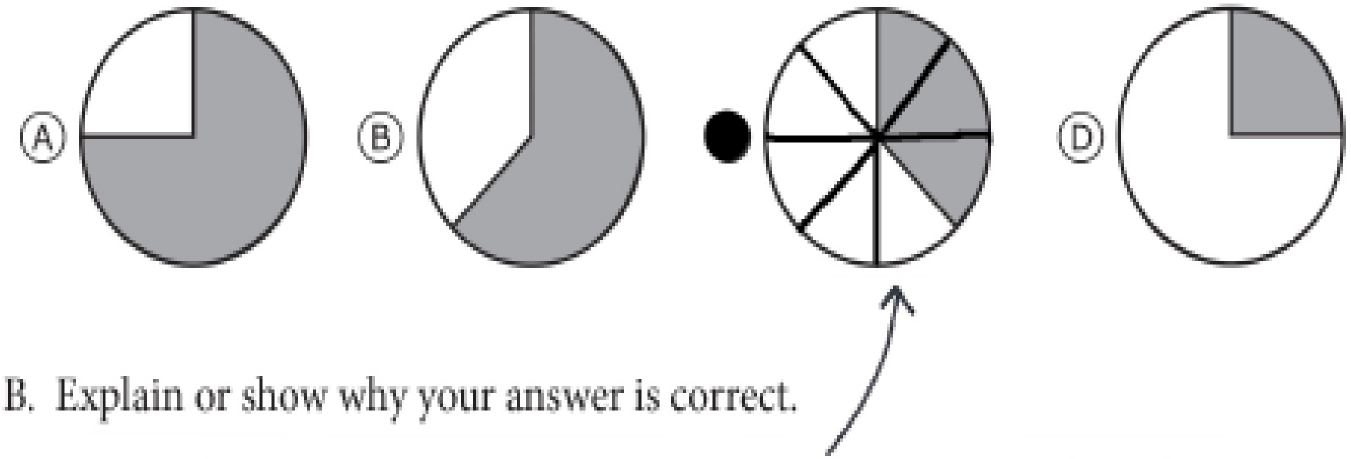
Réponse :

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

ME06_04	**France 38 % - Europe 45 % - International 47 %**
TIMSS Benchmark	Elevé
Domaine de contenu	Nombre
Domaine cognitif	Appliquer
Description	Résoudre un problème sous forme d'énoncé impliquant la soustraction à 1 (ou le complément à 1) d'une fraction, sans référence à une unité.

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

A. Which of the circles below has $\frac{3}{8}$ of its area shaded?



B. Explain or show why your answer is correct.

There are 8 sections and 3 are shaded.

36ème /49

15% de réussite

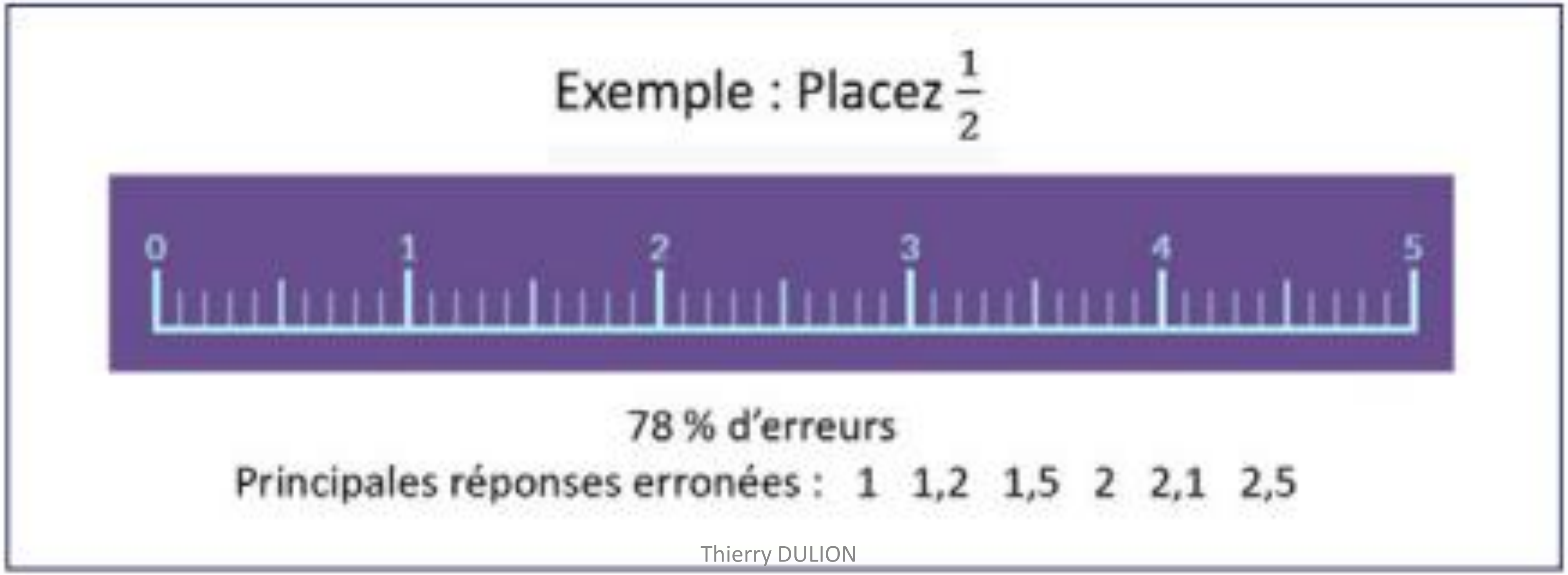
Country	Percent Full Credit
Korea, Rep. of	67 (1.9)
[2] Singapore	64 (1.6)
† Hong Kong SAR	50 (2.8)
Japan	49 (2.3)
[2] † United States	46 (1.4)
Chinese Taipei	43 (2.5)
Poland	41 (2.8)
[2] † Denmark	38 (2.4)
Turkey	35 (2.1)
Norway (5)	34 (2.3)
[2] Portugal	34 (2.2)
Russian Federation	33 (2.4)
† Belgium (Flemish)	32 (2.2)
Slovenia	32 (2.0)
Czech Republic	30 (2.4)
Kazakhstan	28 (2.3)
[1] [2] † Canada	28 (1.9)
Cyprus	27 (1.6)
England	26 (1.8)
[2] Lithuania	26 (2.1)
[2] Spain	24 (2.1)
International Avg.	24 (0.3)
‡ Northern Ireland	24 (2.4)
Australia	23 (1.5)
Chile	23 (1.9)
† Netherlands	22 (2.1)
Ireland	21 (1.6)
[2] Sweden	21 (2.1)
New Zealand	21 (1.7)
[3] Serbia	21 (2.3)
Hungary	19 (1.7)
Oman	18 (1.3)
[2] Bahrain	17 (2.2)
Qatar	15 (1.6)
United Arab Emirates	15 (0.9)
France	15 (1.6)
Finland	13 (1.6)
Slovak Republic	13 (1.7)
[2] Italy	11 (1.4)
Iran, Islamic Rep. of	10 (1.5)
Bulgaria	7 (1.4)
Saudi Arabia	7 (1.1)
Indonesia	6 (1.2)
[1] Georgia	5 (1.2)
Kuwait	4 (1.0)
Morocco	4 (0.8)
Croatia	4 (1.1)
Germany	2 (0.7)
Jordan	- -
South Africa (5)	- -

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

- Évaluation annuelle de près de 6 000 élèves par la DEPP à l'entrée en sixième.
- Révélation d'une compréhension limitée du sens des nombres, y compris des nombres décimaux et des fractions, chez la plupart des élèves.

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

- Seulement 22 % réussissent à placer 1/2.
- Seuls 6 % réussissent avec 3/6.



Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

- Confusion entre fractions et décimaux

- Confusion 1/2 avec 1,2 ou 2/1 avec 2,1

- Compréhension insuffisante des symboles mathématiques.

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

- Problèmes dans les calculs décimaux

- Certains pensent que 0,8 + 1 équivaut à 0,9

- Méconnaissance de la notation décimale et du rôle de la virgule.

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

- Confirmation par d'autres épreuves.

- 50% des élèves trouve le nombre de quarts d'heures dans $\frac{3}{4}$ d’heure

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

- Déficit de compréhension des fractions et décimaux dans tous les milieux sociaux.

- Rep+, taux d'erreurs : 85%

- Milieux favorisés, taux d'erreurs : 75% à 70%.

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

- Les filles font plus d'erreurs que les garçons dans la compréhension des fractions.

- Dans top 20%, garçons: 2/3.

- Absence d'amélioration sur trois ans (2020, 2021, 2022)

Difficultés en mathématiques pour les élèves français :

- 45% d'échecs en 2nde générale pour les fractions simples.

Pourquoi est-ce important ?

Pourquoi est-ce important ?

- « Les fractions constituent l'un des concepts les plus essentiels en mathématiques, et leur pertinence pour la réussite future en mathématiques ne saurait être sous-estimée. **Comprendre les fractions est crucial pour aborder des sujets avancés tels que l'algèbre**. » *(Petit, Laird et Marsden, 2010, p. xi, traduction libre).*

Pourquoi est-ce important ?

- Un chercheur en sociologie de l’université du Massachusetts (États-Unis) a montré que :
- 68 % des salariés ont besoin d'utiliser les fractions (utiles pour la proportionnalité).
- Ne pas maîtriser les bases de l'algèbre peut donc être un handicap.
- Une des principales discriminations dans les études et dans la vie professionnelle.

Eléments de réponse

1 Allez sur wooclap.com

2 Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur

Code d'événement

EFGIKG

1 Envoyez @EFGIKG au 06 44 60 96 62

2 Vous pouvez participer

Copier le lien de participation

N : les nombres entiers naturels

Historiquement, les nombres entiers naturels ont été les premiers à être utilisés. Les hommes de l'époque comptaient ce qu'ils possédaient.

3 enfants, 25 chèvres, 56 arbres, etc**.**

Ces nombres servent à compter des objets entiers**.**

2 pommes 5 chaises 9 planètes 500 personnes 1 246 980 étoiles

Ils sont tous des nombres entiers et positifs.

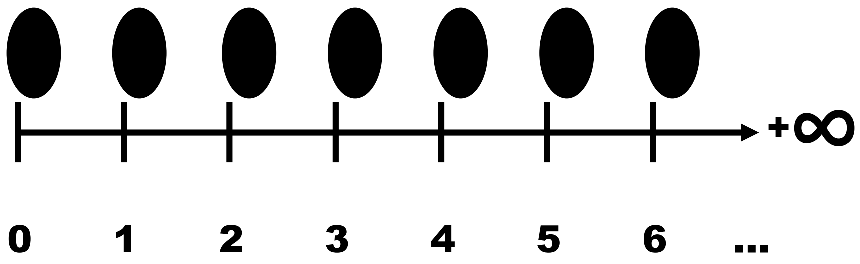
Ils débutent à 0 et ne se terminent jamais; après un nombre, il y en a toujours un de plus.

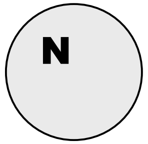
N : $\{$**0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …**$\}$

Ils s'étendent jusqu'à l'infini sans jamais l'atteindre.

Remarque : Les hommes ont inventé un symbole pour décrire l'infini; ce symbole est le suivant : ∞

Sur une droite numérique, cet ensemble ne peut être représenté que par des points.





Ce dessin symbolise l’ensemble des entiers naturels. Tous les nombres entiers naturels se retrouvent à l’intérieur de ce cercle.

Les nombres entiers négatifs, les fractions et les nombres décimaux ne font pas partie de cet ensemble.

Z : les nombres entiers relatifs

Un jour, les hommes ont eu besoin de représenter de nouvelles situations.

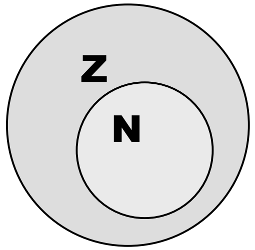
Exemples **:**

- la température, les dettes, …

L'ensemble des entiers relatifs ne comporte que des nombres entiers (pas de fractions ni de décimaux) : il regroupe les nombres entiers naturels et les nombres entiers négatifs.

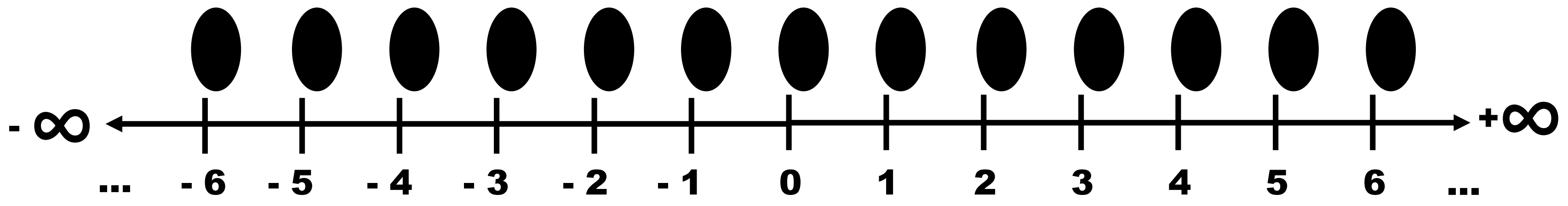
La famille s'agrandit !

Z : {…, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, … }



Remarque : Un Allemand dénommé Zahl a été le premier a parlé de l'ensemble des entiers relatifs : d'où le « Z ».

Ils permettent de construire une droite numérique à gauche du 0.



Ils ne se terminent jamais s'en allant comme pour les nombres naturels vers l'infini positif, mais aussi, vers l'infini négatif.

Comme pour l'ensemble des nombres naturels, on ne peut représenter l'ensemble des entiers relatifs sur une droite numérique par des points.

Q : les nombres rationnels

Comment faire pour représenter :

la moitié d'une pomme,   3 centièmes de seconde,   le quart d'une tarte,   5,75 $ …

Nous avons besoin d'un nouvel ensemble qui regroupe toutes les fractions et les nombres décimaux périodiques.

Q : $\{\ldots, -6, \ldots, -5{,}24, \ldots, -1/2, \ldots, 0, \ldots, 3/4, \ldots, 2, \ldots, 7{,}238, \ldots\}$

La lettre Q signifie un quotient.

Il existe une définition formelle pour décrire cet ensemble :

Un nombre rationnel est un nombre de la forme $\dfrac{a}{b}$ dans laquelle a et b sont des entiers et $b \neq 0$.

Un nombre rationnel est un nombre de la forme $\frac{a}{b}$ dans laquelle a et b sont des entiers et $b \neq 0$.

a et b sont des nombres entiers : $\frac{2}{5}$ ← **2 est un nombre entier** ← **5 est un nombre entier**

donc, $\frac{2}{5}$ est une fraction ou un nombre rationnel.

$\frac{3}{4,5}$ ← **3 est un nombre entier** ← **4,5 n'est pas un nombre entier, mais un nombre rationnel**

donc, $\frac{3}{4,5}$ n'est pas une fraction.

$b \neq 0$: en mathématique, la division par 0 n'est pas définie.

Exemple : Posons $x = \frac{5}{0}$ et effectuons le produit croisé : $0x = 5$

Cette expression exprime la valeur que nous devons donner à x, pour que multipliée par 0, l'expression soit égale à 5. **?**

Par conséquent, un dénominateur ne doit jamais être égal à zéro.

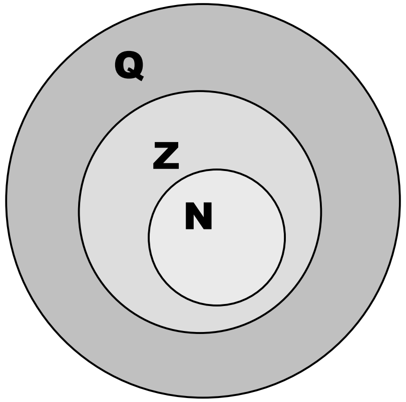
Les nombres entiers et décimaux sont considérés comme des nombres rationnels, car ils ont une période de 0.

Exemples : $7 = 7,\overline{0}$ $\quad - 125 = - 125,\overline{0}$ $\quad 34,8 = 34,8\overline{0}$

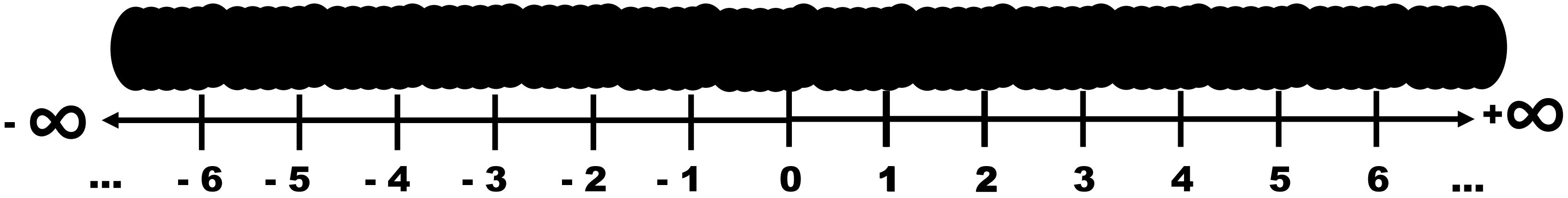
Les entiers font partie de l’ensemble des rationnels parce qu’ils sont des fractions entières.

Exemples : $\frac{8}{4} = 2$ $\quad \frac{-9}{3} = -3$

La famille s’agrandit encore !



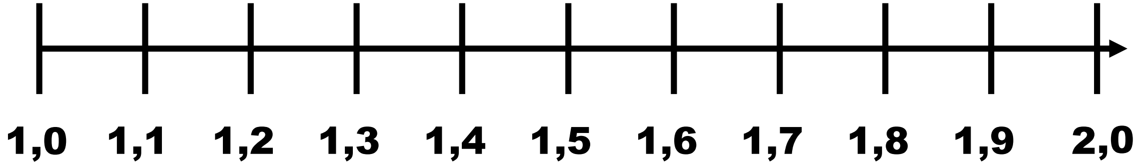
Sur la droite numérique, il y a de plus en plus de nombres.



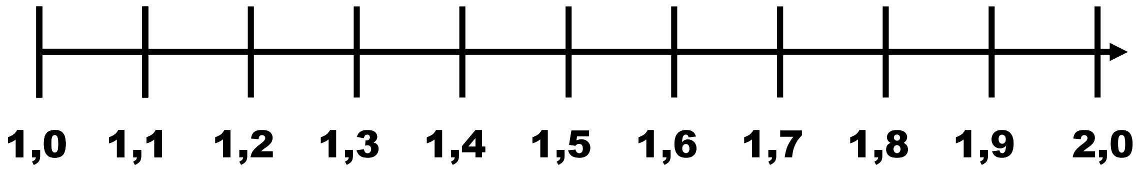
Cette figure, démontre qu'il y a beaucoup de nombres, mais il y en a beaucoup plus encore.

Exemple : Quels nombres pouvons nous inscrire entre 1 et 2 ?

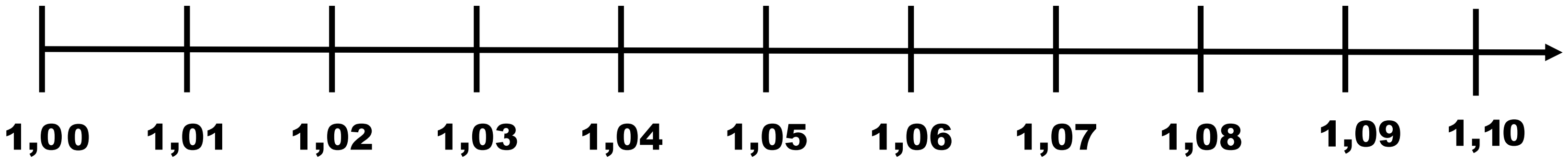
Agrandissons cette distance :



Plaçons les dixièmes :



Maintenant, agrandissons la distance entre 1,0 et 1,1 et insérons les centièmes :



Une démarche identique pourrait être effectuée pour placer les millièmes, les dix-millièmes, etc.

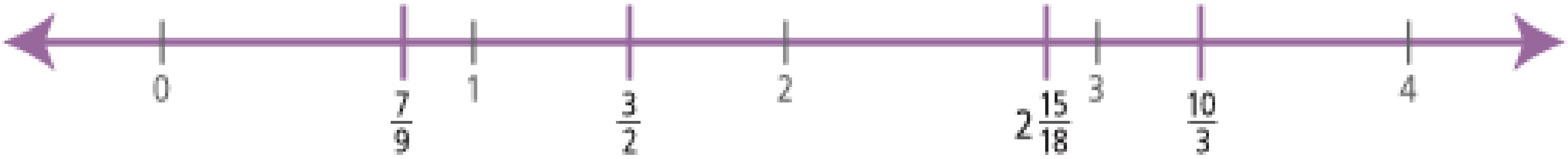
Cette démarche pourrait être répétée jusqu'à l'infini, puisqu'il y a toujours des nombres dont la partie décimale est de plus en plus petite.

Il existe donc une infinité de nombres entre deux nombres.

Qu'est-ce qu’une fraction ?

Qu'est-ce qu'une fraction ?

- Une fraction est une représentation d'un nombre, tel que représenté sur la droite numérique ci-dessous :



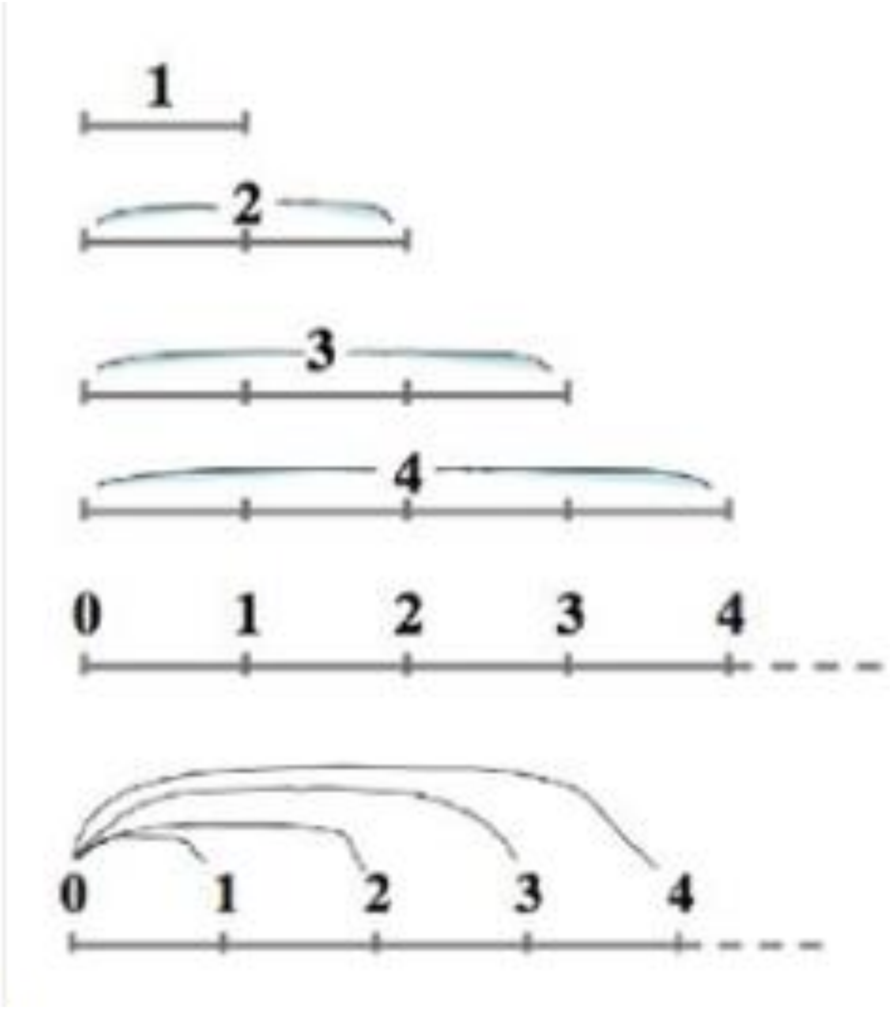
Qu'est-ce qu'une fraction ?

- Les fractions en lien avec des graduations permettent :
  - de renforcer le statut de « nombres » des fractions
  - d'aborder les problèmes d'intercalation et de rangement qui sont primordiaux pour la compréhension des nombres décimaux et de leurs particularités (nombre décimal compris entre deux nombres entiers et nombre décimal compris entre deux nombres décimaux).
  - Sur une graduation fractionnaire, peuvent figurer à la fois le nombre-repère et le nombre-mesure : cela participe à une meilleure compréhension de deux fonctions du nombre (les nombres pouvant être des entiers naturels ou non)

Droite graduée

- Un nombre désigne à la fois un point (l’abscisse) et la distance à l’origine (la mesure algébrique : aspect métrique).

Droite graduée



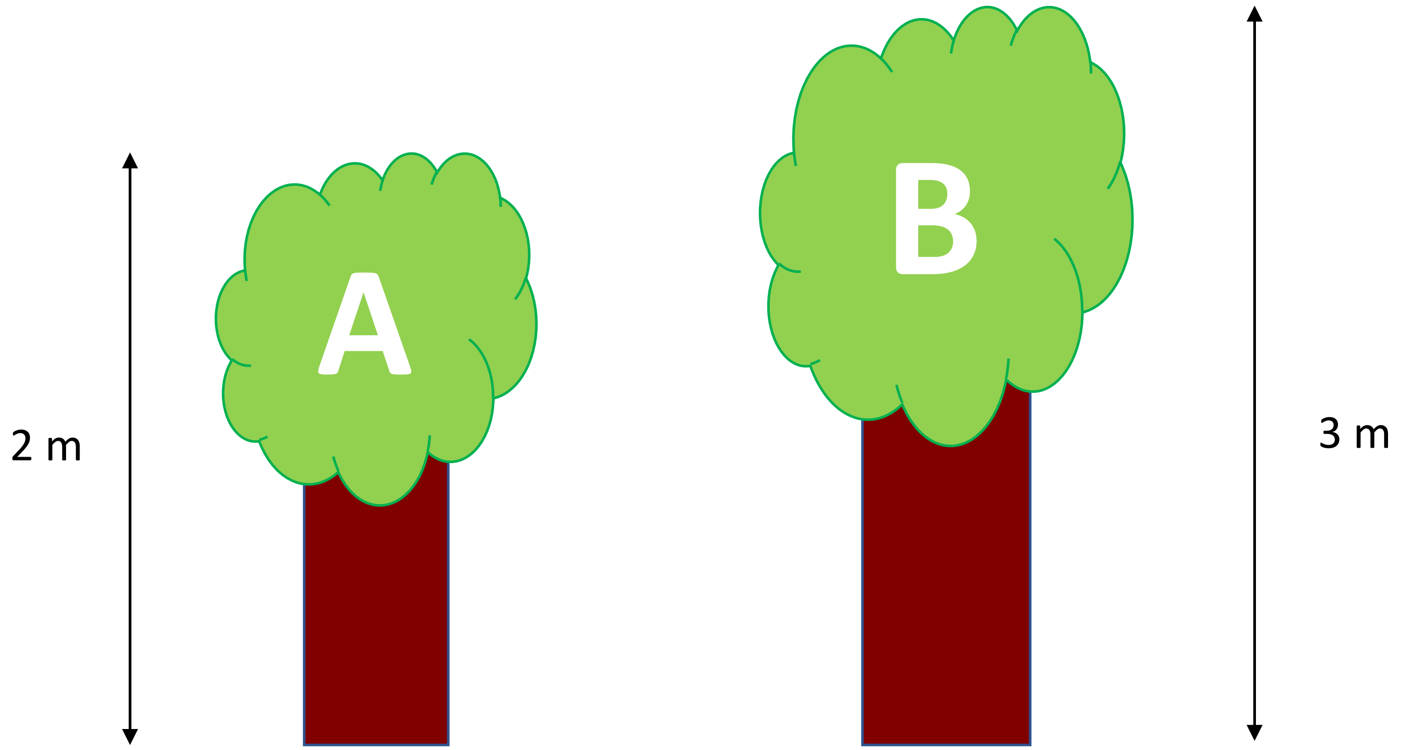
Pourquoi les fractions sont difficiles à comprendre ?

Pourquoi les fractions sont difficiles ?

- Significations multiples ;
- Notation unique des fractions ;
- Du raisonnement additif au raisonnement multiplicatif.

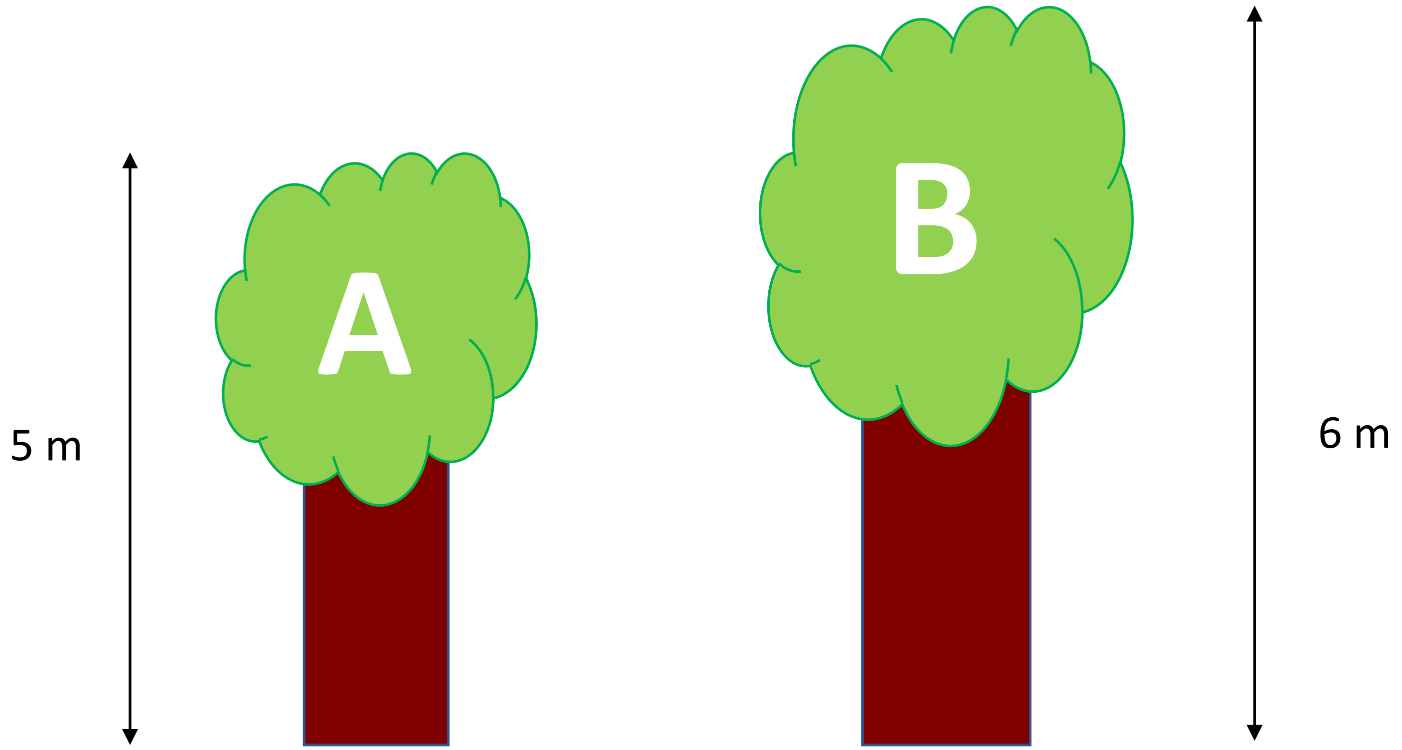
RAISONNEMENT ADDITIF VS MULTIPLICATIF

- Il y a trois ans, j'ai mesuré deux arbres dans mon jardin.



RAISONNEMENT ADDITIF VS MULTIPLICATIF

- Trois ans plus tard, j'ai mesuré ces mêmes arbres dans mon jardin.



RAISONNEMENT ADDITIF VS MULTIPLICATIF

- **Quel arbre a le plus grandi ?**

Raisonnement additif :

2 + 3 = 5

3 + 3 = 6

Les deux arbres ont, tous les deux, grandi de 3 m.

RAISONNEMENT ADDITIF VS MULTIPLICATIF

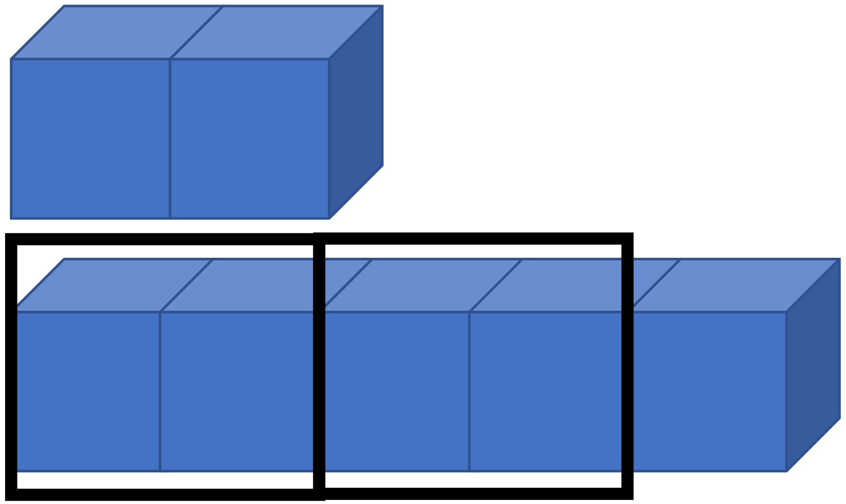
- **Quel arbre a le plus grandi ?**

Raisonnement multiplicatif :

L’arbre A a plus grandi car il a plus que doublé (sinon il ferait 4 m) alors que l’arbre B a seulement doublé.

RAISONNEMENT ADDITIF VS MULTIPLICATIF

- **De combien de plus que le double ?**



RAISONNEMENT ADDITIF VS MULTIPLICATIF

- L'élève utilise le raisonnement multiplicatif en voyant que 8 équivaut à 2 x 4 ou 4 x 2.
- Le raisonnement multiplicatif consiste à voir les nombres selon leur valeur relative plutôt que leur valeur absolue.
- L'élève applique un raisonnement multiplicatif pour établir qu'un groupe qui passe de 3 à 9 enfants subit une augmentation plus importante qu'un autre qui passe de 100 à 150 enfants

Pourquoi les fractions sont difficiles ?

- Généralisation excessive des connaissances antérieures des nombres entiers. (McNamara & Shaughnessy, 2010).

Pourquoi les fractions sont difficiles ?

- $\frac{1}{4}$ est plus grand que $\frac{1}{3}$ parce que 4 est plus grand que 3.
- 0.157 est plus grand que 0.63 parce que 157 est plus grand que 63.
- $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$ parce que 2+1=3 et 3+2=5
- 4 + 0.3 = 7 ou 0.7 parce que 4+3=7 et 0.4+0.3=0.70.
- $\frac{2}{3}\times 9$ ne peut pas être égal à 6 parce que "la multiplication rend les nombres plus grands".
- $4\div\frac{1}{2}$ ne peut pas être 8 parce que "la division rend les nombres plus petits".

Significations multiples

Significations multiple des fractions.

- La compréhension des fractions ne se limite pas à :
  - Nommer correctement les composantes d'une fraction;
  - Colorier avec précision une fraction donnée d'une surface;
  - Connaître les règles procédurales pour transformer une fraction en décimal et inversement;
  - Connaître les règles procédurales pour transformer un pourcentage en fraction et inversement;

Significations multiple des fractions.

- La notation de fraction $\frac{a}{b}$ possède de nombreuses significations et interprétations variées.

- Mettre l'accent sur les diverses significations des fractions permet une meilleure compréhension de la notion chez les élèves *(Clarke, Roche, Mitchell, 2008 ; Lamon, 2012 ; Siebert, Gaskin, 2006).*

Significations multiple des fractions.

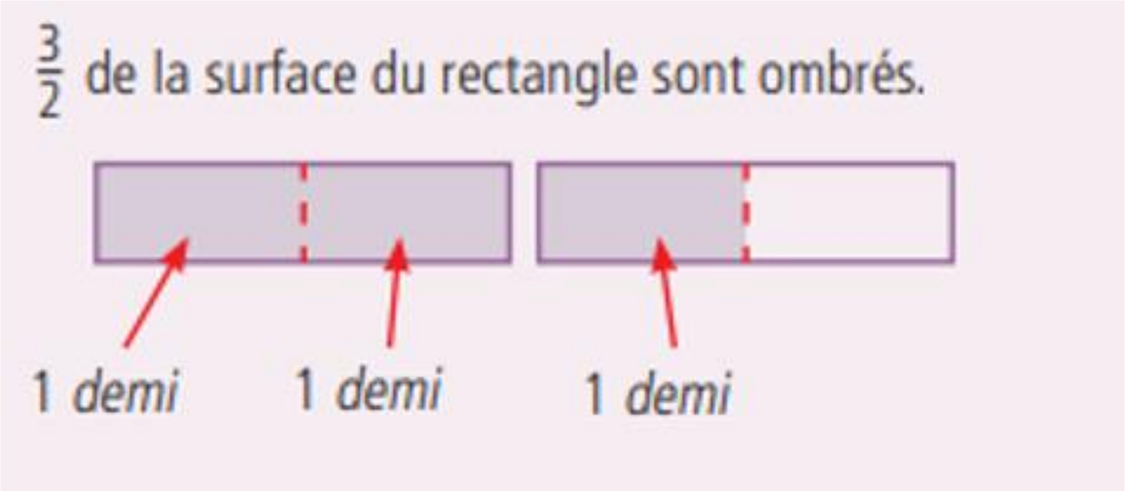
- **On se pose et on réfléchit**

Donner trois sens différents de la fraction $\frac{3}{4}$?

Significations multiple des fractions.

- **La fraction – partie/tout**

Fractions dans lesquelles le dénominateur indique l'unité fractionnaire, et le numérateur indique le nombre d'unités fractionnaires comptées.



Significations multiple des fractions.

- **La fraction – mesure**
- Fractions peuvent être comprises comme des mesures, impliquant l'existence d'une unité de mesure.
- Par exemple, dans la fraction 5/8, en utilisant la fraction 1/8 comme unité de mesure, nous constatons qu'il en faut cinq pour atteindre 5/8.
- De la partie d'un tout" à "comparé à un tout.

Significations multiple des fractions.

- **La fraction – opérateur**
- Créer des images de figures géométriques par des homothéties, en modifiant uniquement leurs mesures (agrandissement ou réduction). Par exemple, prendre la moitié d'une mesure existante pour créer une nouvelle mesure finale.
- Transformer des collections en construisant diverses versions à partir d'une collection originale, comme augmenter ou réduire la taille. Pour calculer un tiers des élèves d'une école de 850, il suffit de multiplier 850 par $\frac{1}{3}$

Significations multiple des fractions.

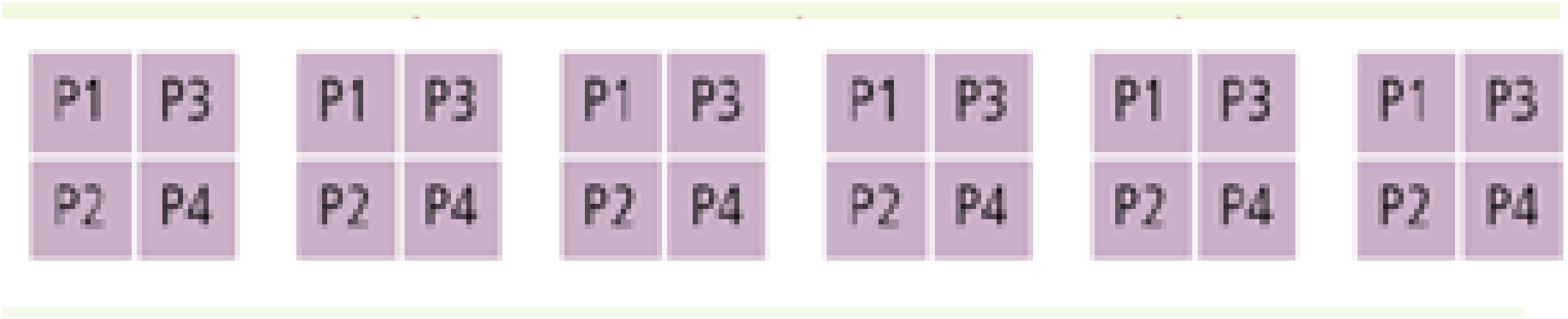
- **La fraction – quotient**

- Résultat d'une division

- $\frac{a}{b}$ représente le résultat de a divisé par b.

- <u>Exemple</u>: 6 tartes partagées entre 4 personnes.
- Si on veut savoir combien chaque personne va avoir de quantité de tartes, on divisé 6 par 4. La part de chacun est 6/4 ou 3/2 .

La fraction - quotient



Significations multiple des fractions.

- **La fraction – rapport**
- Exprime la relation entre deux quantités.

« J'ai 3 oranges et deux poires. »

- Ratio :

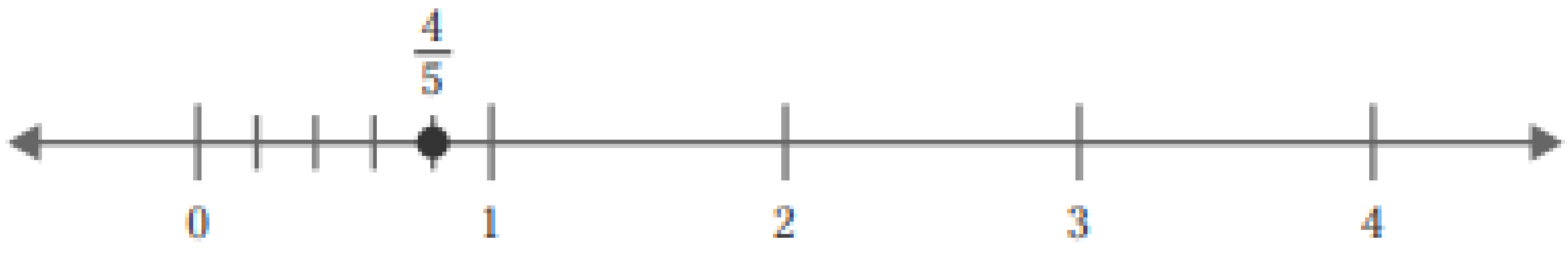
Le ratio orange-poire est $\frac{3}{2}$

- Proportion :

La proportion d'oranges est $\frac{3}{5}$

Significations multiple des fractions.

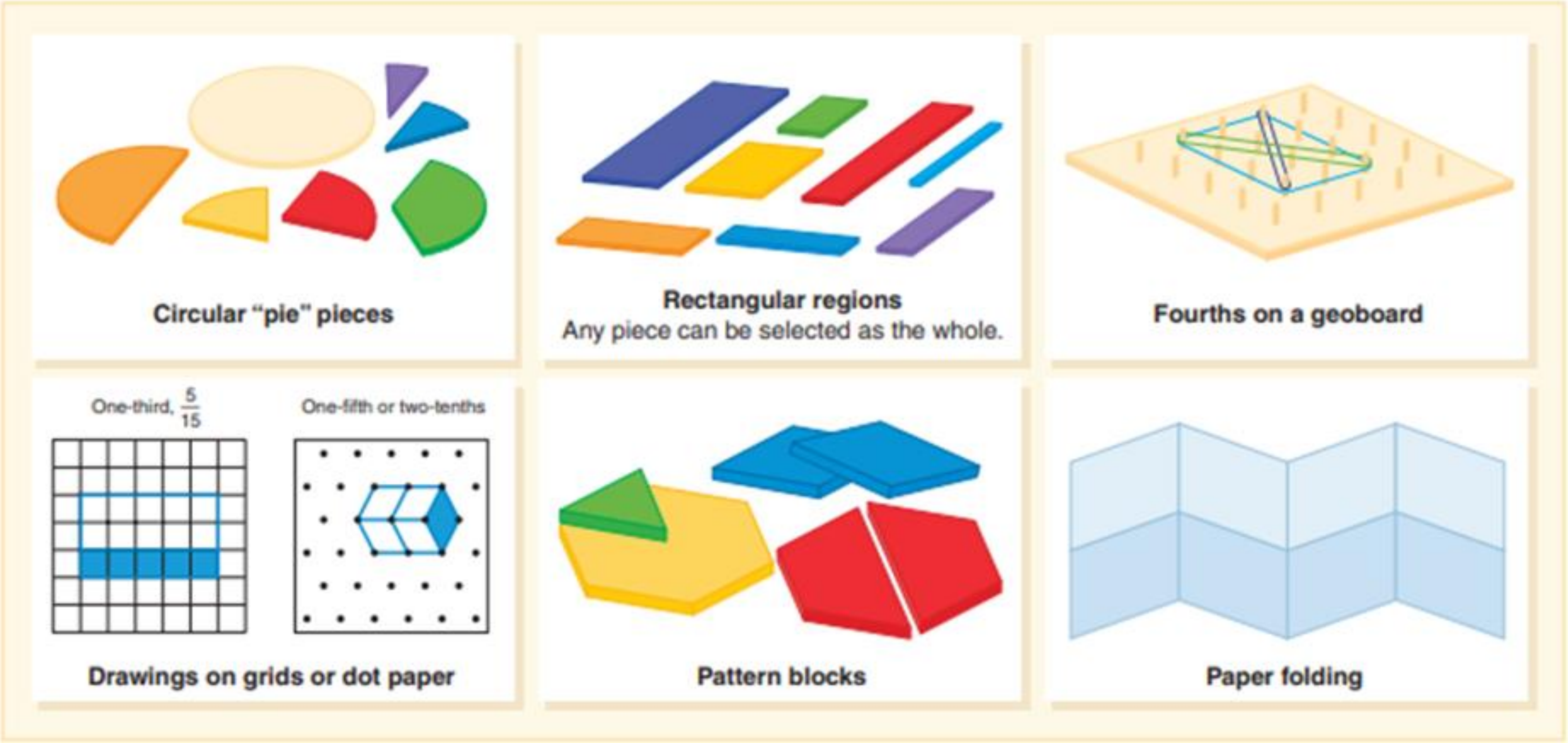
- **La fraction – nombre**
- Attendus de fin CM1 : L’élève donne progressivement aux fractions le statut de nombre.
- En plaçant une fraction sur la droite numérique, telle que 4/5, nous explorons les divers aspects des concepts étudiés en lien les uns avec les autres.



Les mathématiciens qui ont reçu la Médaille Fields (similaire au Prix Nobel pour les autres sciences) soulignent souvent l'importance de la visualisation géométrique comme méthode essentielle pour développer et élargir notre compréhension mathématique.

Utilisations des modèles visuels et tactiles dans l'enseignement des fractions

- Modèles de Surface



Utilisations des modèles visuels et tactiles dans l'enseignement des fractions

- Modèles Linéaires

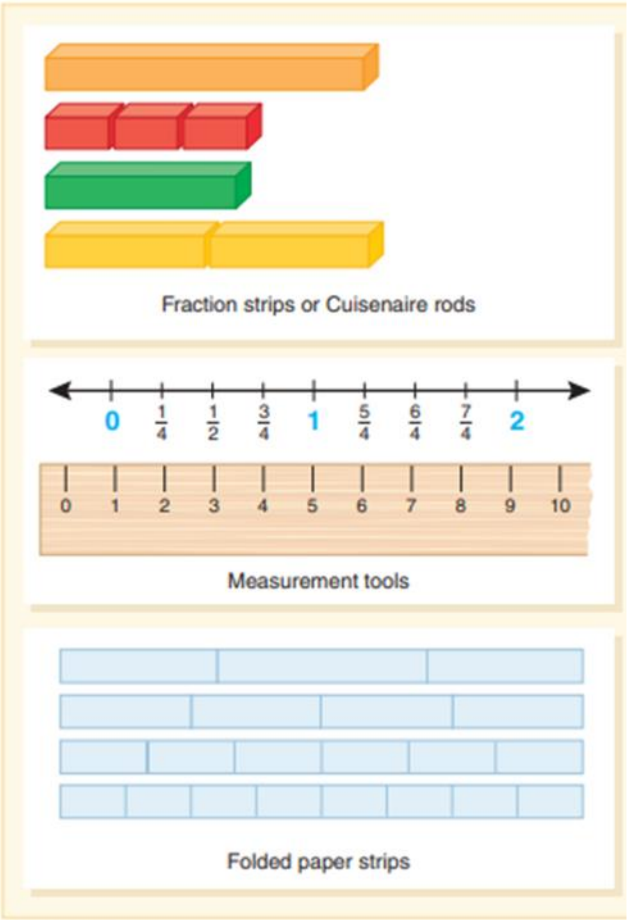


FIGURE 15.2 Length or measurement models for fractions.

Utilisations des modèles visuels et tactiles dans l'enseignement des fractions

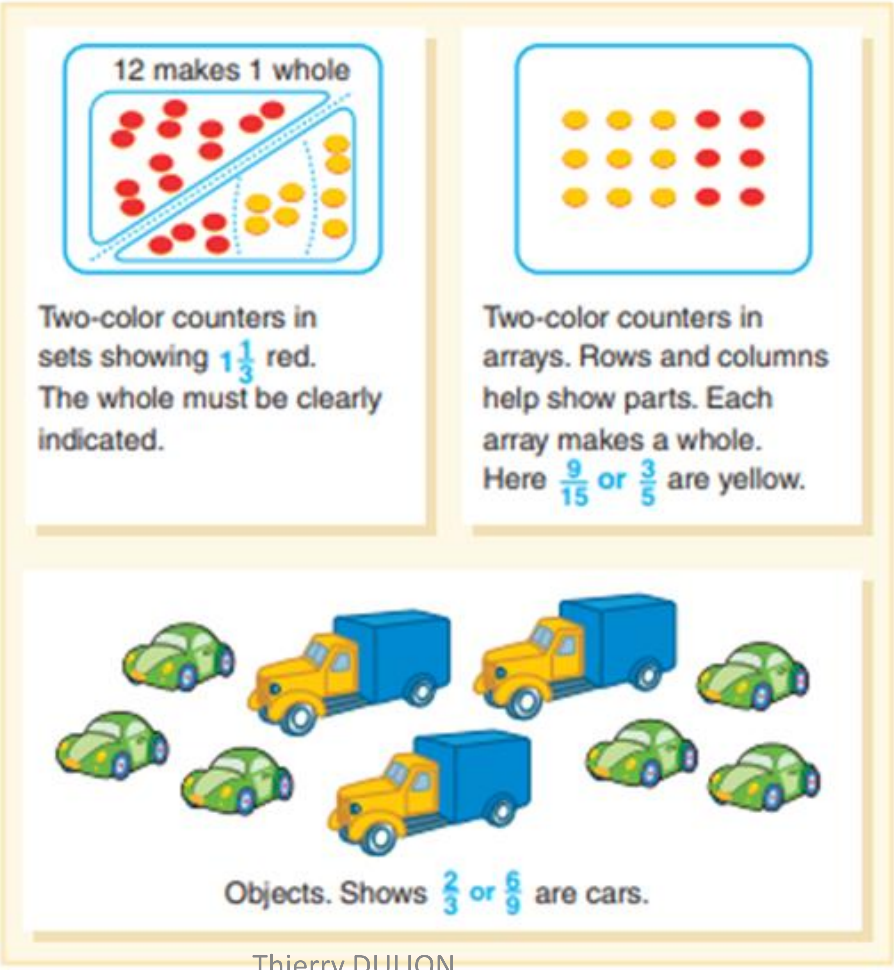
- Modèles Linéaires
- **Importance des Modèles Linéaires :**
  - Cruciaux pour le développement de la compréhension des fractions.
  - Sous-utilisés en classe malgré leur pertinence.
- **Recherches Récentes :**
  - Études soulignant l'importance de la droite numérique pour comprendre les fractions comme des nombres.
  - Recommandation d'une utilisation précoce dès les premières années.
- **Recommandations :**
  - Utiliser les droites numériques comme outil central dans l'enseignement des concepts liés aux fractions.
  - Aider les élèves à étendre leur compréhension du système numérique au-delà des nombres entiers.

Utilisations des modèles visuels et tactiles dans l'enseignement des fractions

- Modèles Linéaires
- **Les réglettes cuisenaires**

Utilisations des modèles visuels et tactiles dans l'enseignement des fractions

- Modèles d'Ensemble



Utilisations des modèles visuels et tactiles dans l'enseignement des fractions

- Les élèves doivent maîtriser les trois modèles : surface, longueur et ensemble.
- La compréhension réelle d'une fraction comme 1/4 est démontrée lorsque l'élève représenter un quart en utilisant les trois modèles.

Utilisations des modèles visuels et tactiles dans l'enseignement des fractions

Modèle	Ce qui Définit le Tout	Ce qui Définit les Parties	Ce que la Fraction Signifie
Surface	La superficie de la région définie	Des zones égales	La partie de la superficie couverte par rapport à l'unité entière
Longueur ou droite numérique	L'unité de distance ou de longueur	Une distance/longueur égale	La position d'un point par rapport à 0 et à d'autres valeurs sur la droite numérique
Ensemble	Quelle que soit la valeur déterminée comme un ensemble	Un nombre égal d'objets	Le décompte des objets dans le sous-ensemble par rapport au tout défini

Évaluation Formative des Fractions

Une Méthode Simple et Pratique

- Utilisez une feuille de papier pliée en tiers.
- Étiquetez les sections supérieures avec 'Surface', 'Longueur' et 'Ensemble'.
- Attribuez une valeur fractionnaire (par exemple, 3/4) à chaque section.

- **Processus d'Évaluation :**
  - Demandez aux élèves de (1) dessiner une image et (2) rédiger une phrase décrivant un contexte ou un exemple pour la fraction donnée.
  - Cette méthode peut être précise pour des fractions communes ou utilisée comme une activité d'estimation avec des fractions complexes (ex. 31/58).

Focus sur l'unité

Focus sur l'Unité

Idées fausses n°1

le tout est fait d'une pièce

les élèves pensent que l'unité est toujours composée d'une seule pièce parce qu'ils commencent à apprendre les fractions en divisant des objets uniques.

Focus sur l'Unité

Idées fausses n°2

une fraction est plus petite que le tout, l'unité, ou '1'

Beaucoup d'élèves ont tendance à croire que les fractions sont systématiquement inférieures au tout, à l'unité ou à '1', ce qui explique pourquoi une fraction comme 7/5 leur semble dépourvue de sens.

Cette confusion vient du fait que les enfants apprennent au départ que 'a/b' signifie 'a parties sur b parties égales', ce qui les fait penser que 'a' doit être plus petit que 'b'

Focus sur l'Unité

Idées fausses n°3

Expérience limitée avec des unités non continues

Souvent associée à la méprise selon laquelle l'unité doit être une entité unique, se trouve la méprise selon laquelle l'entité est continue.

Modéliser des fractions en utilisant des formes circulaires, carrées ou rectangulaires contribue à cette croyance.

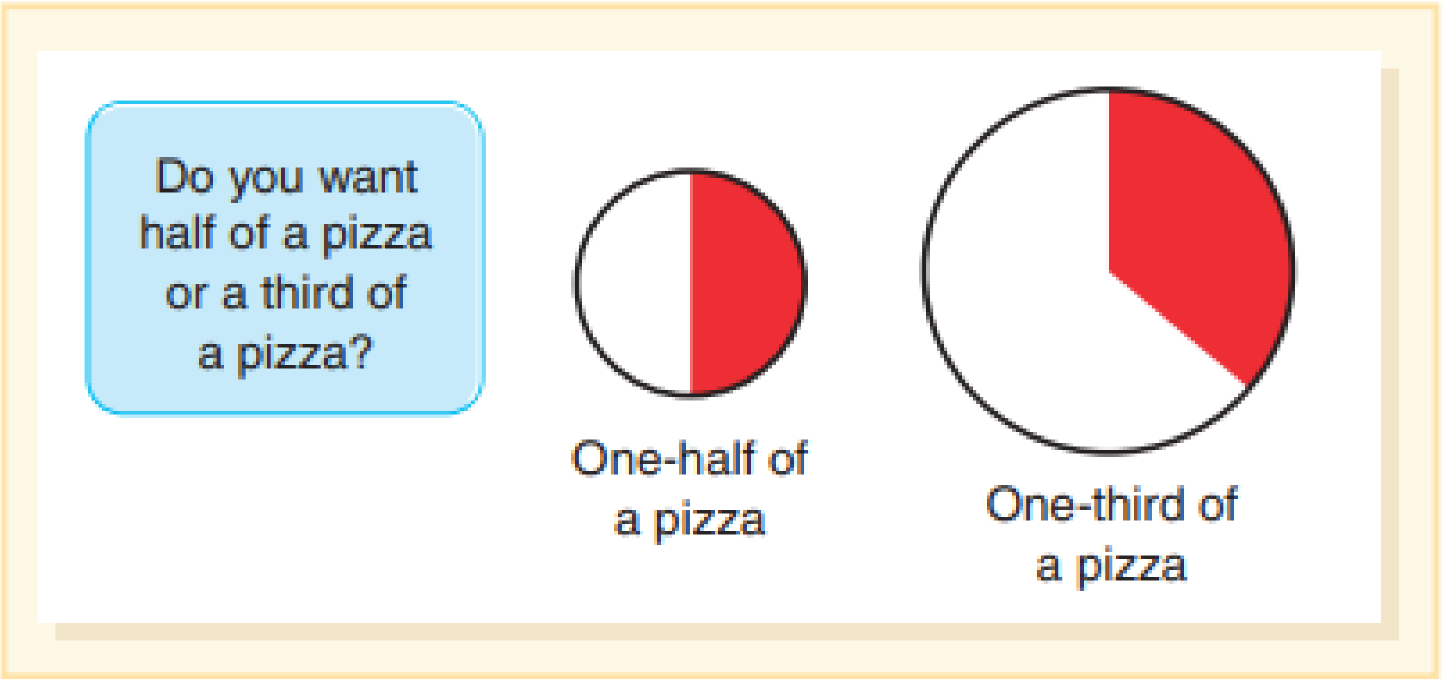
Focus sur l'Unité

La Taille d'une Fraction est Relative.

Une fraction nous renseigne seulement sur la relation entre la partie et le tout. Considérez la situation suivante :

Erreur de la Pizza : Mark a le choix entre un tiers de pizza ou la moitié d'une pizza. Parce qu'il a faim et aime la pizza, il choisit la moitié. Son amie Jane prend un tiers de pizza, mais finit par en avoir plus que Mark. Comment est-ce possible ?

Focus sur l'Unité



Focus sur l'Unité

Poser régulièrement des questions telles que :

'Quel est le TOUT ?’

'Quelle est l'unité ?’

‘Combien d’unités faut-il pour faire un tout ?’

Focus sur l'Unité

- **Travailler avec une Variété d'Unités**

Unités discrètes / Unités continues

Les quantités discrètes peuvent être comptées, tandis que les quantités continues sont mesurées.

Unités composites

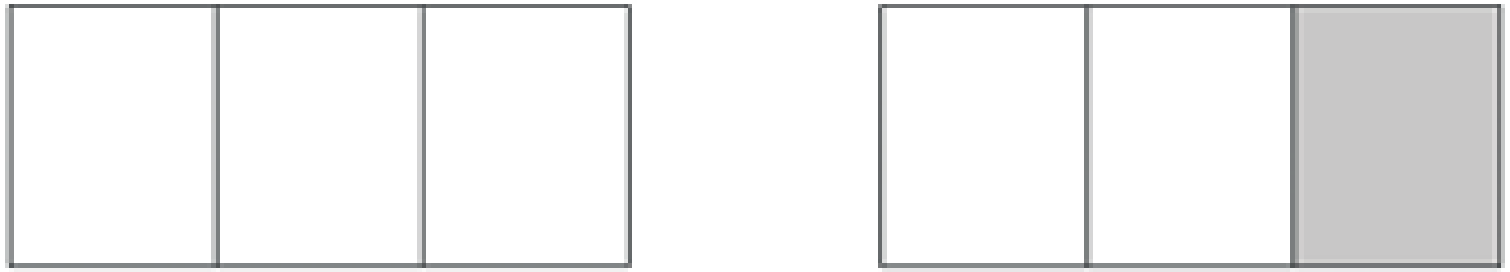
les unités composites sont des entités uniques qui contiennent un ensemble d'articles, tels qu'une boîte de 3 balles de tennis, une main de 5 doigts ou une boîte de 12 œufs.

Unités fractionnaires

L'unité de mesure elle-même est exprimée sous forme de fraction

Activités pour comprendre que l'unité n'est pas nécessairement un seul objet.

La partie grisée représente la part restante de deux gâteaux.



Emma dit que la fraction de gâteaux mangée est 5/3, et Koffi affirme que c'est 5/6.

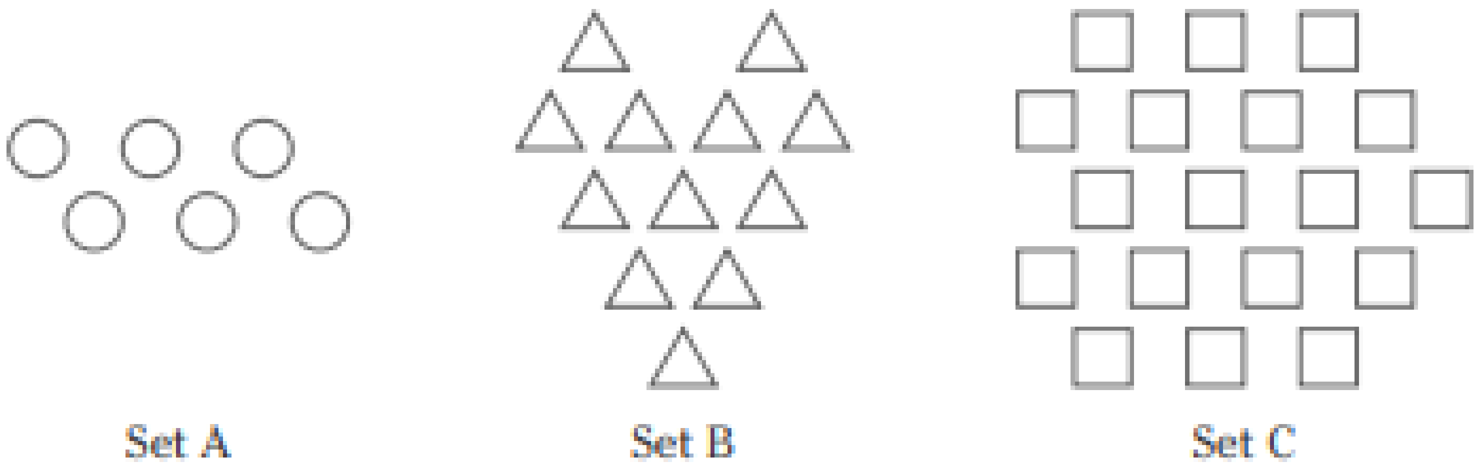
Essaie d'expliquer le raisonnement d'Emma.

Essaie d'expliquer maintenant le raisonnement de Koffi.

Es-tu plutôt d'accord avec Emma ou avec Koffi ?

Activités pour comprendre que l'unité n'est pas nécessairement un seul objet.

Colorier 1/6 des éléments dans chacun des ensembles suivants :



Activités pour comprendre que le choix de l'unité peut varier

La flèche désigne un point P de la droite numérique qui représente un nombre.

Indique en vert où se trouve le nombre 1 si le point P représente le nombre 3. Indique en bleu où se trouve le nombre 1 si le point P représente le nombre 3 4. Indique en rouge où se trouve le nombre 1 si le point P représente le nombre 3 2.

Notation

La fraction - notation

Numérateur

Vinculum

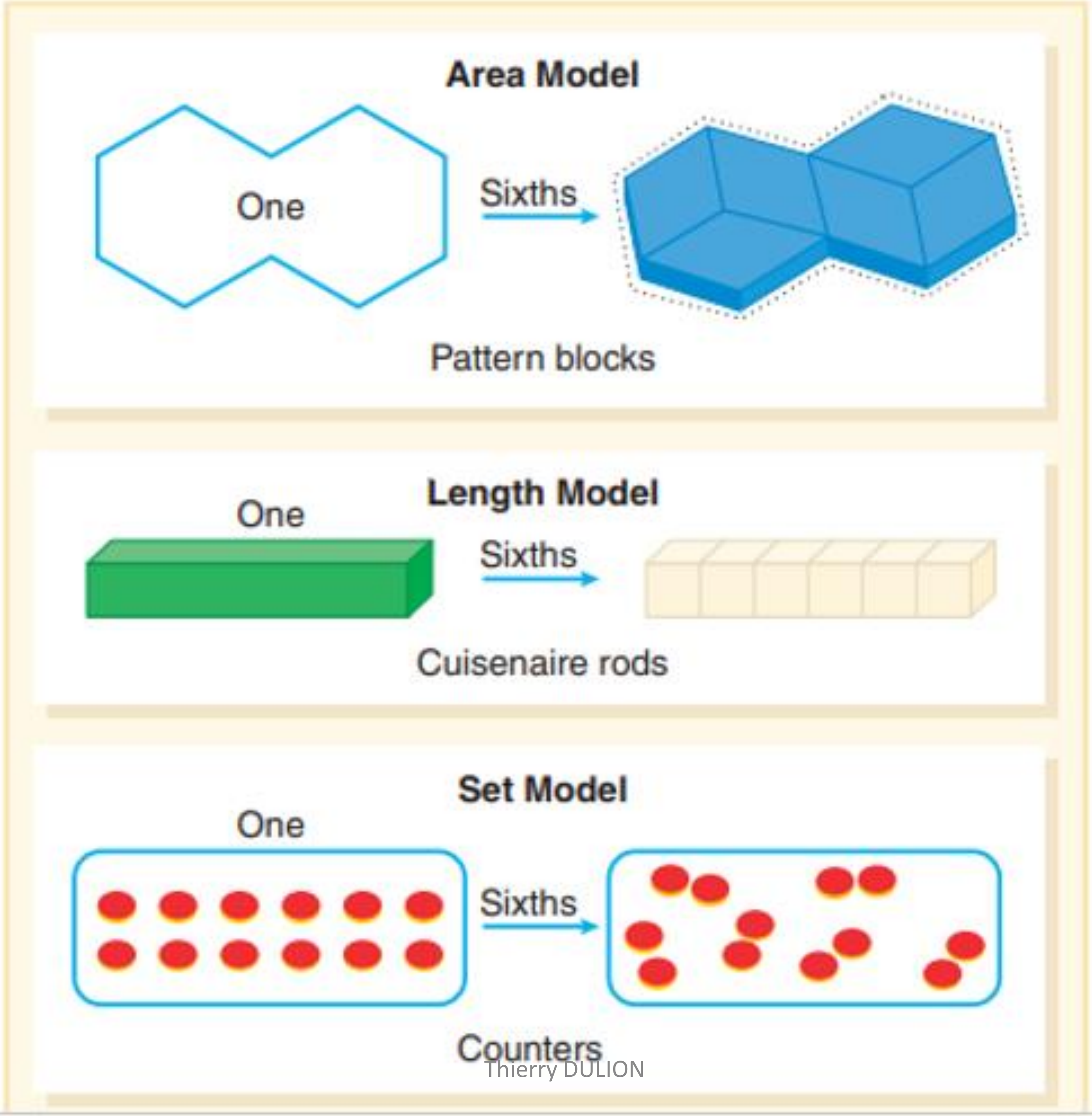
Dénominateur

$$\frac{5}{3}$$

Dénominateur - partition

Dénominateur - partition

On appelle « partition » le fait de découper une forme en parties de taille égale


Area Model
One
Sixths
Pattern blocks
Length Model
One
Sixths
Cuisenaire rods
Set Model
One
Sixths
Counters

Dénominateur - partition

Les parties fractionnaires doivent avoir la même taille, même si elles peuvent avoir des formes différentes.

Le nombre de parties de taille égale dans l'unité définit la fraction (ex. 4 parties signifient 1/4 chacune).

Partition avec des Modèles de Surface.

Activités pour comprendre que les parties fractionnées du tout sont toujours égales.

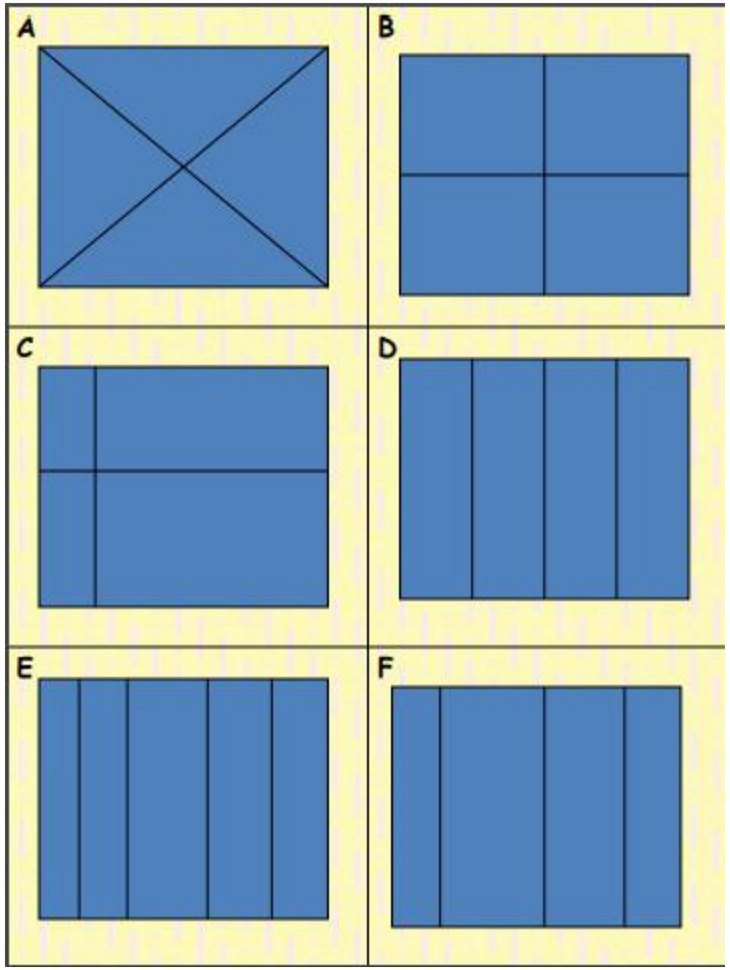
Idris dit : « C’est 1/3 du tout. » ; Adèle réagit : « Non, moi je crois que c’est 1/4. » Le professeur demande aux deux élèves d’expliquer leur raisonnement.

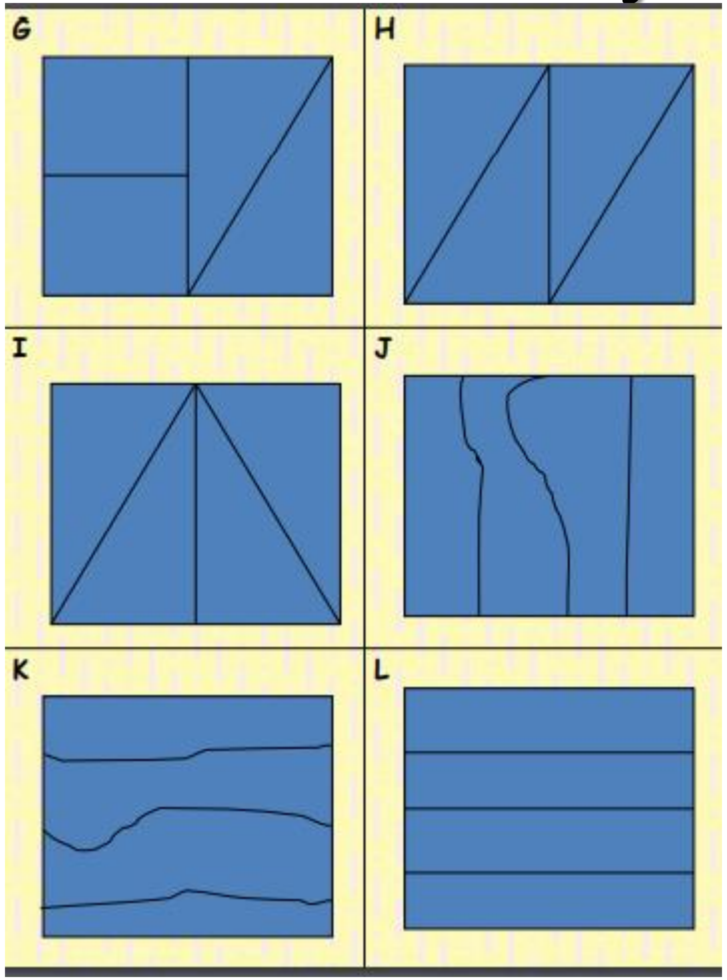
Activités pour comprendre que les parties fractionnées du tout sont toujours égales.

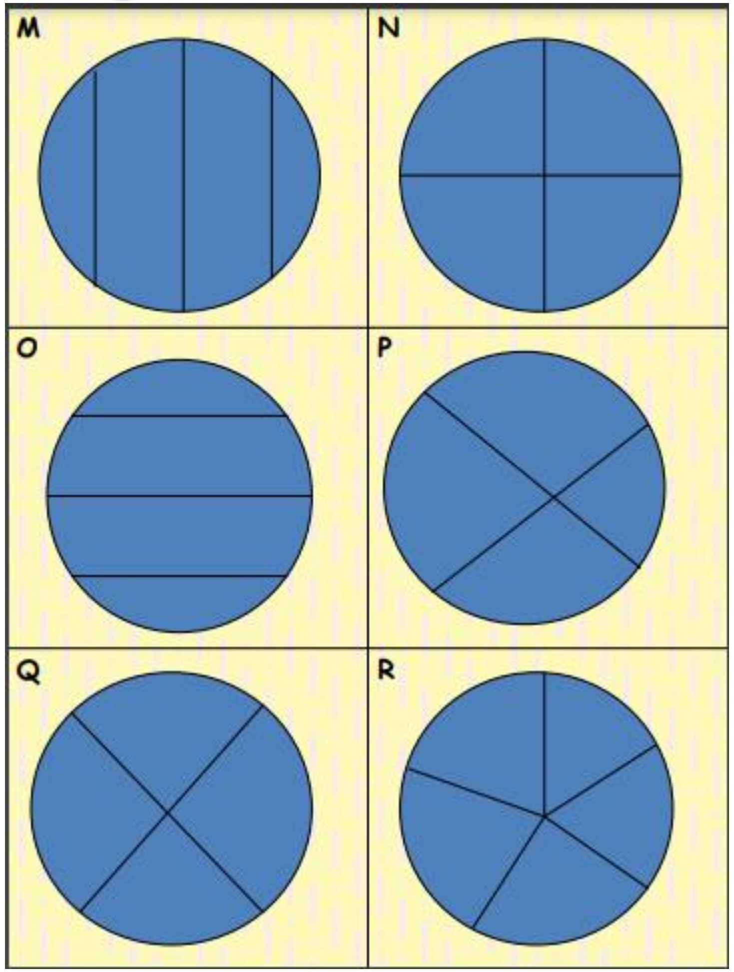
les élèves pensent que les parties fractionnaires doivent non seulement avoir la même taille, mais aussi la même forme.

Demandez aux élèves de décrire les parties fractionnaires dans un rectangle, comme celui illustré ici :

Activités pour comprendre que les parties fractionnées du tout sont toujours égales.

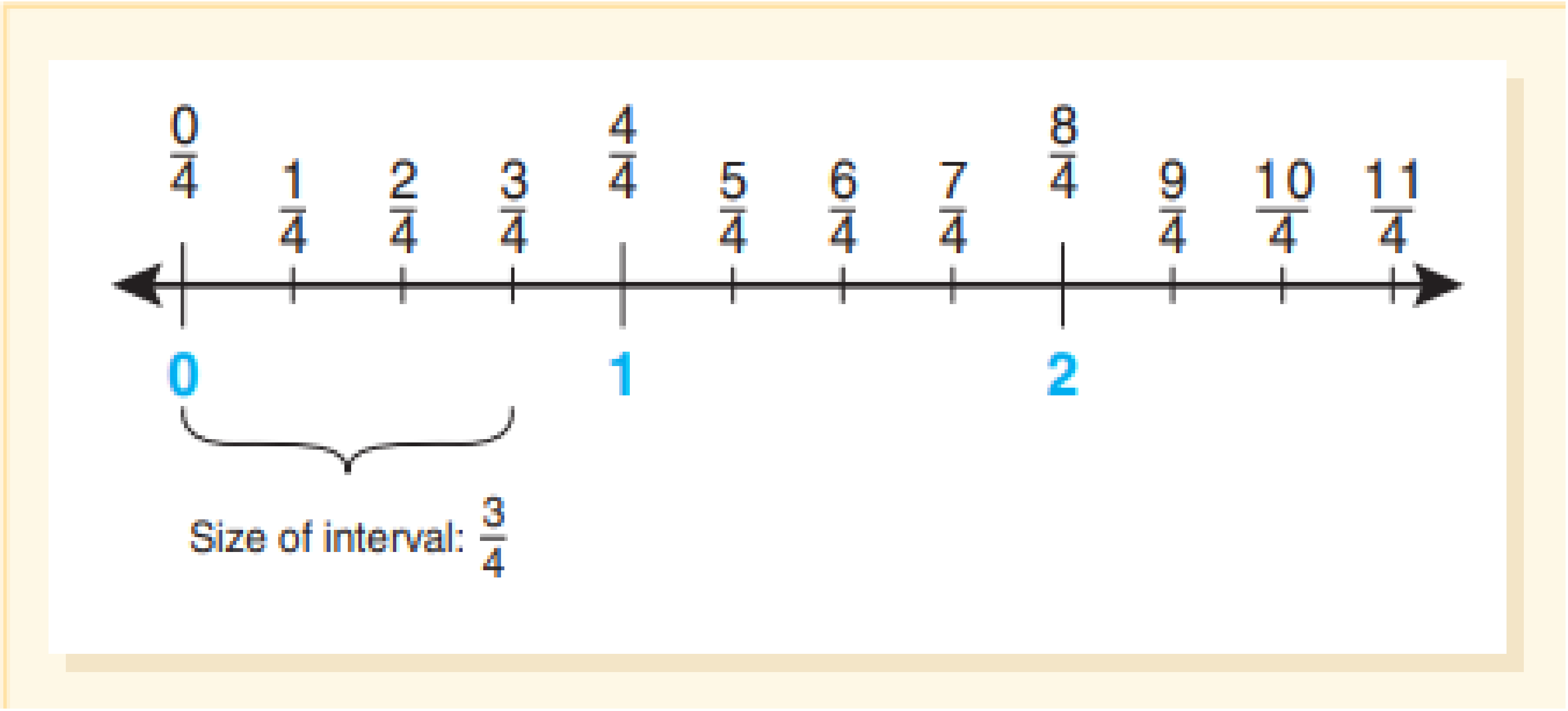






Dénominateur - partition

Partition avec des Modèles de Longueur.



Dénominateur - partition

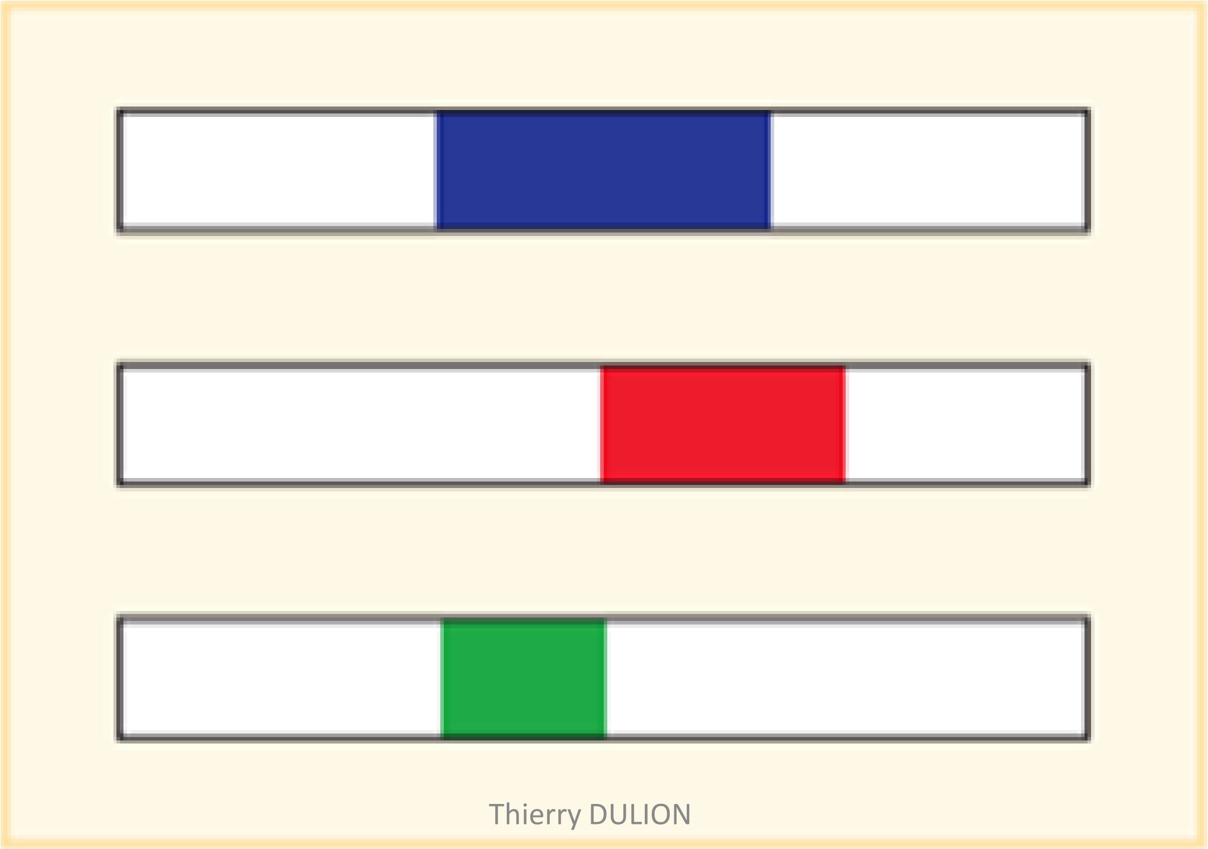
Partition avec des Modèles de Longueur.

Aider les élèves à comprendre les concepts liés aux droites graduées

Une erreur fondamentale : négliger la taille des intervalles

Dénominateur - partition

Quelle fraction est colorée ?



Dénominateur - partition

Quelle fraction est colorée ?

Dénominateur - partition

- La stratégie de partition
- Le modèle de longueur

Ces méthodes sont régulièrement employées à Singapour, un pays qui excelle dans les évaluations internationales en mathématiques, pour résoudre des problèmes mathématiques concrets.

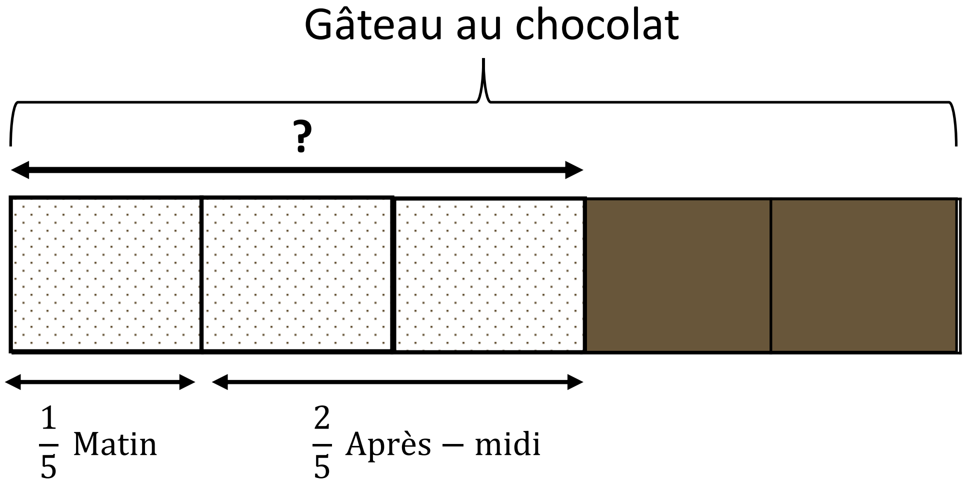
Exemple 1

Abby a mangé 1/5 d'un gâteau au chocolat le matin.

Elle a mangé 2/5 du même gâteau dans l'après-midi.

Quelle fraction du gâteau au chocolat Abbey a-t-elle mangé au total ?

Exemple 1 (Solution)



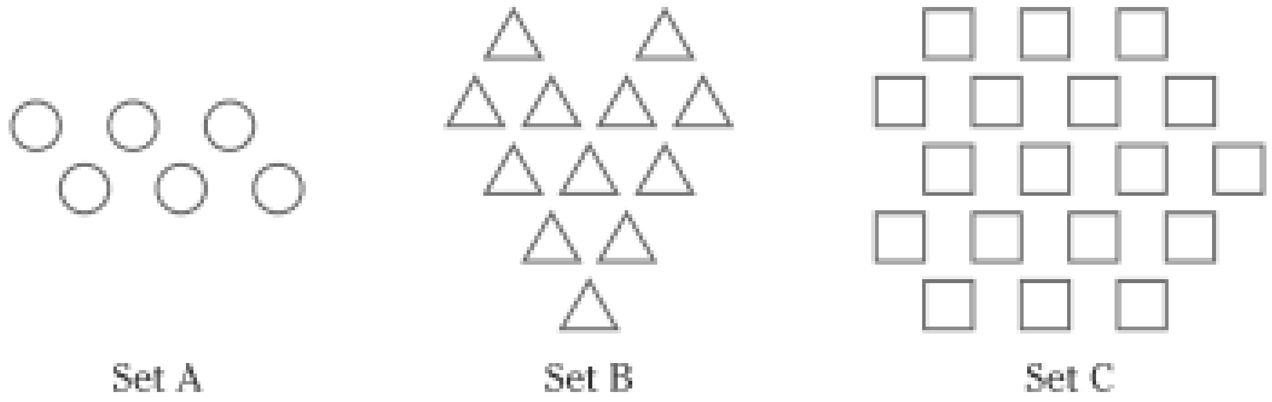
$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Abby a mangé $\frac{3}{5}$ de gâteau au chocolat.

Dénominateur - partition

Le partitionnement avec des modèles d’ensemble.

Diviser des ensembles d'objets, comme des pièces de monnaie, des jeton, etc.



Dénominateur - partition

- Focus sur les tâches de Partage

- Recommandation de l'IES research : « S'appuyer sur la compréhension informelle des élèves du partage et de la proportionnalité pour développer les concepts initiaux des fractions » (Siegler et al., 2010)

- Les tâches de partage sont généralement formulées sous forme de problèmes simples. Quatre amis partagent deux cookies. Combien de cookies chaque ami recevra-t-il ? Ensuite, les problèmes deviennent légèrement plus difficiles : Supposons qu'il y ait quatre cookies à partager équitablement entre trois enfants. Combien chaque enfant recevra-t-il ?

Dénominateur - partition

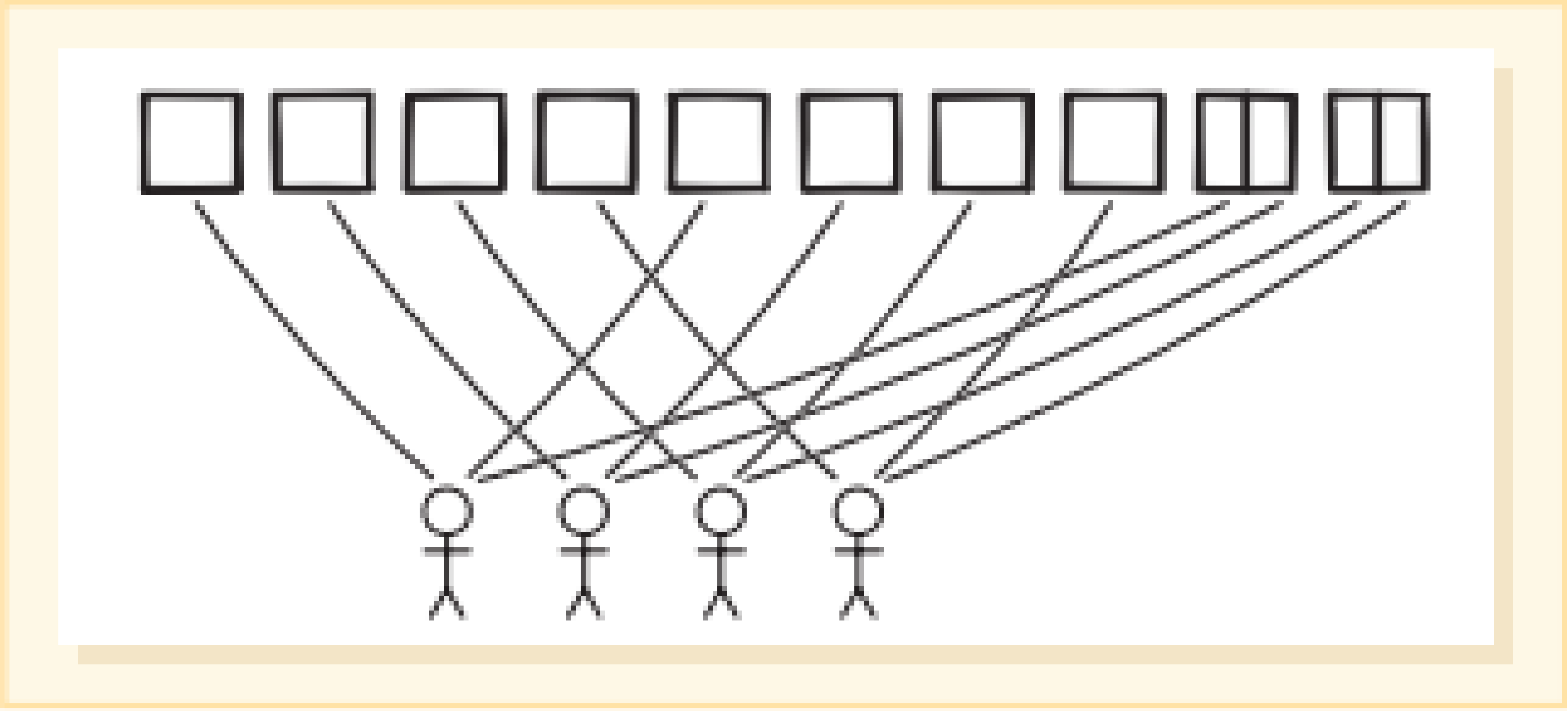


FIGURE 15.6 Ten brownies shared with four children.

Tâche de Niveau 1 : Pour les élèves qui ont encore besoin d'expérience en matière de partage en deux.	Tâche de Niveau 2 : Pour les élèves à l'aise avec le partage en deux et prêts à essayer d'autres stratégies.	Tâche de Niveau 3 : Pour les élèves prêts à résoudre des problèmes où ils combinent le partage en deux avec de nouvelles stratégies.
Comment 2 personnes peuvent-elles partager 3 brownies ? Comment 2 personnes peuvent-elles partager 5 brownies ?	Comment 4 personnes peuvent-elles partager 3 brownies ? Comment 3 personnes peuvent-elles partager 4 brownies ? Comment 3 personnes peuvent-elles partager 5 brownies ? Comment 6 personnes peuvent-elles partager 4 brownies ?	Comment 3 personnes peuvent-elles partager 5 brownies ? Comment 3 personnes peuvent-elles partager 2 brownies ? Comment 5 personnes peuvent-elles partager 4 brownies ? Comment 6 personnes peuvent-elles partager 4 brownies ?

Numérateur - itération

Numérateur - itération

- Dans l'apprentissage des nombres entiers, le comptage précède et aide les élèves à additionner, puis à soustraire.
- Le comptage des parties fractionnaires, ou itération, aide les élèves à comprendre la relation entre les parties (le numérateur) et le tout (le dénominateur).
- Le numéro du haut (numérateur) compte.
- Le numéro du bas (dénominateur) indique ce qui est compté.
- Les élèves doivent comprendre que, par exemple, 3/4 peut être considéré comme un compte de trois parties appelées quarts.

Numérateur - itération

- De la même manière qu'ils connaissent le nombre d'unités dans dix, les élèves devraient être capables de répondre à la question

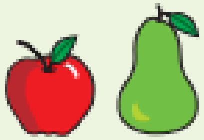
  - "Combien de cinquièmes forment un tout ?"

Activités pour voir les fractions comme des multiples d'une fractions unitaires

Si cette part représente $\frac{1}{6}$, quel pourrait être un tout possible?

$\frac{1}{6}$

Si ces fruits représentent $\frac{1}{3}$ de l'ensemble, combien de fruits contient l'ensemble?



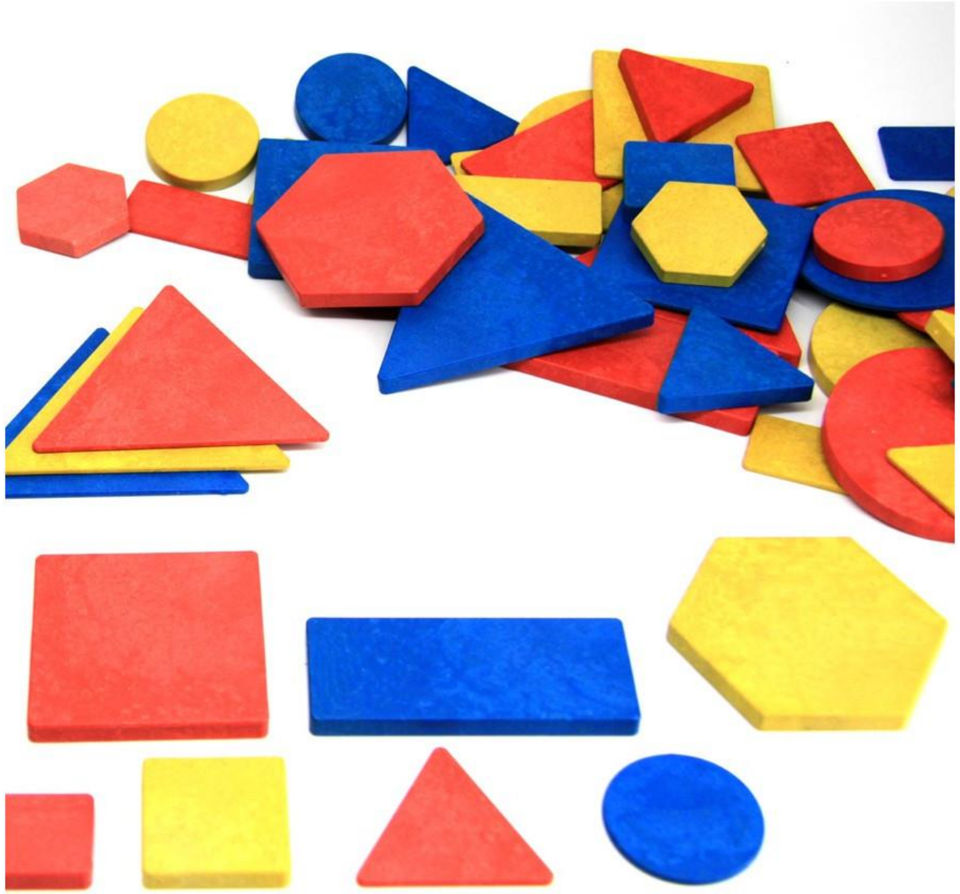
$\frac{1}{3}$

Activités pour voir les fractions comme des multiples d'une fractions unitaires

Activité : moins, plus, égal à un tout

- Donner aux élèves des morceaux fractionnaires de même taille et de leur indiquer le type de fraction.
- Par exemple, leur donner sept morceaux de taille égale en précisant que chaque morceau représente 1/8.
- Les élèves doivent ensuite déterminer si cette collection de morceaux est inférieure à un tout, égale à un tout ou supérieure à un tout.

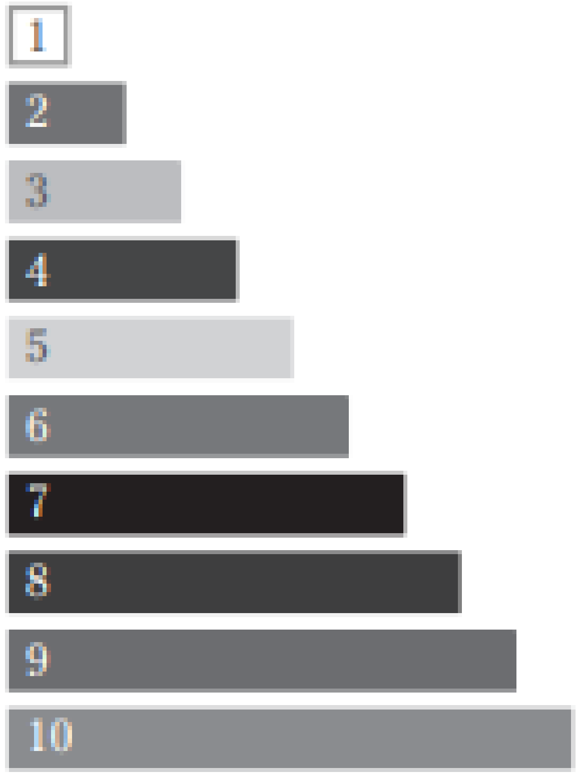
Activités pour voir les fractions comme des multiples d’une fractions unitaires



Numérateur - itération

- L'itération particulièrement liée aux modèles de longueur
- L'itération ressemble beaucoup à la mesure.

Numérateur - itération



Numérateur - itération

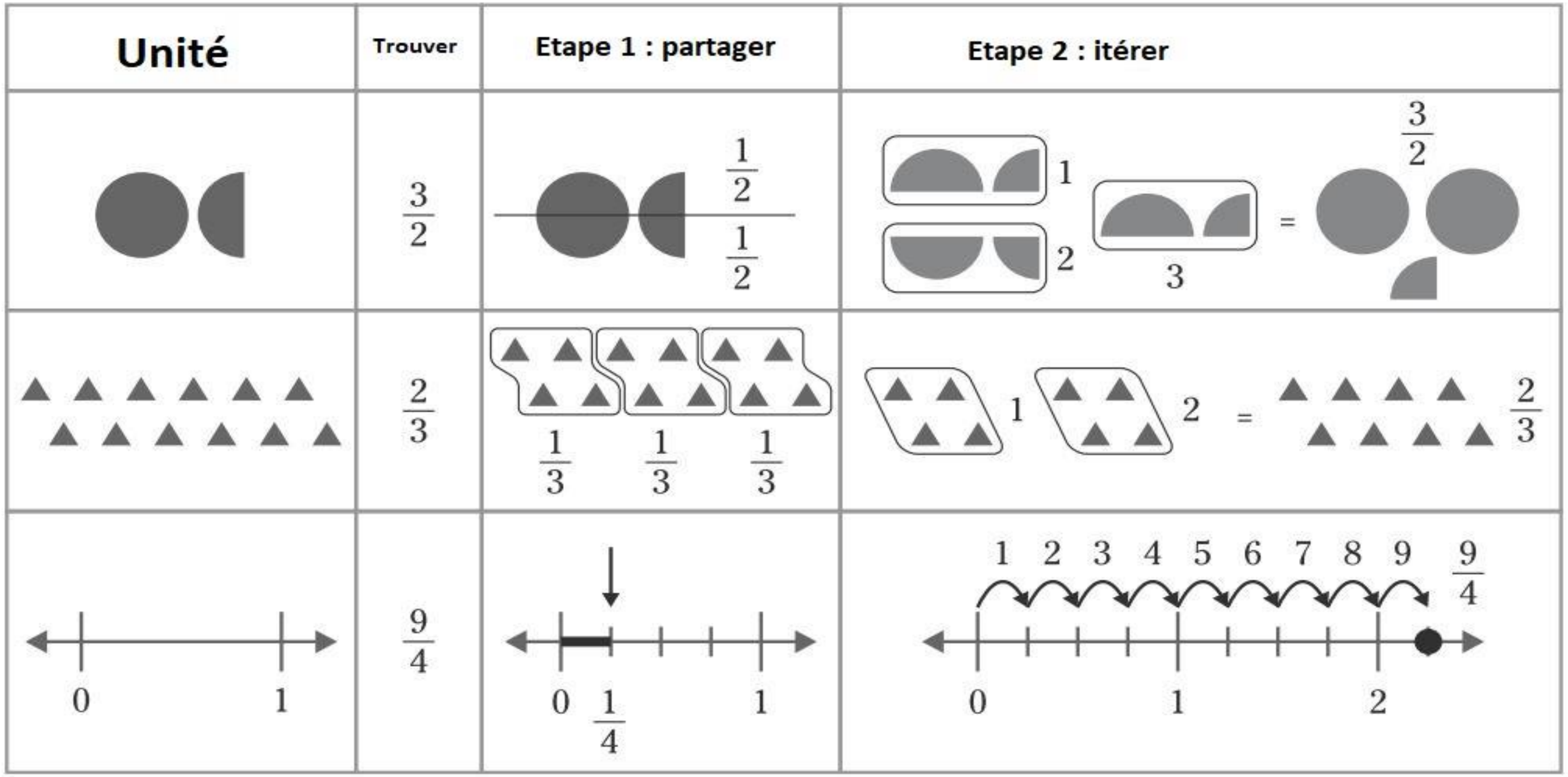
- L'itération peut être appliquée aux modèles d'ensembles.
- Exemples de Questions :
- "Si 5 jetons représentent 1/4 du tout, combien de jetons représentent 15 du tout ?"
- "Trois jetons représentent 1/8 de mon ensemble ; quelle est la taille de mon ensemble ?"
- "Vingt jetons représentent 2/3 de mon ensemble ; quelle est la taille de mon ensemble ?"
- Activités Suggérées :
- "Trouver la Partie avec les Jetons" et "Trouver le Tout avec les Jetons".

Numérateur - Dénominateur

- Une fois que les élèves ont intégré que
- le dénominateur (b) de toute fraction a/b indique le nombre de parts égales (1/b) dans lesquelles le tout doit être partitionné (d'où le diviseur),
- que le numérateur (a) indique le nombre de copies ou d'itérations de la partie fractionnaire 1/b souhaitées ou nécessaires (d'où le multiplicateur),
- Ils peuvent construire n'importe quelle fraction, qu'elle soit inférieure ou supérieure à 1.

Numérateur - Dénominateur

- Passer du tout à une partie :



Numérateur - Dénominateur

- Pour évaluer la capacité des élèves à partitionner et itérer :

Numérateur - itération

- Trouver le « TOUT » à partir d'une fraction et d'une partie

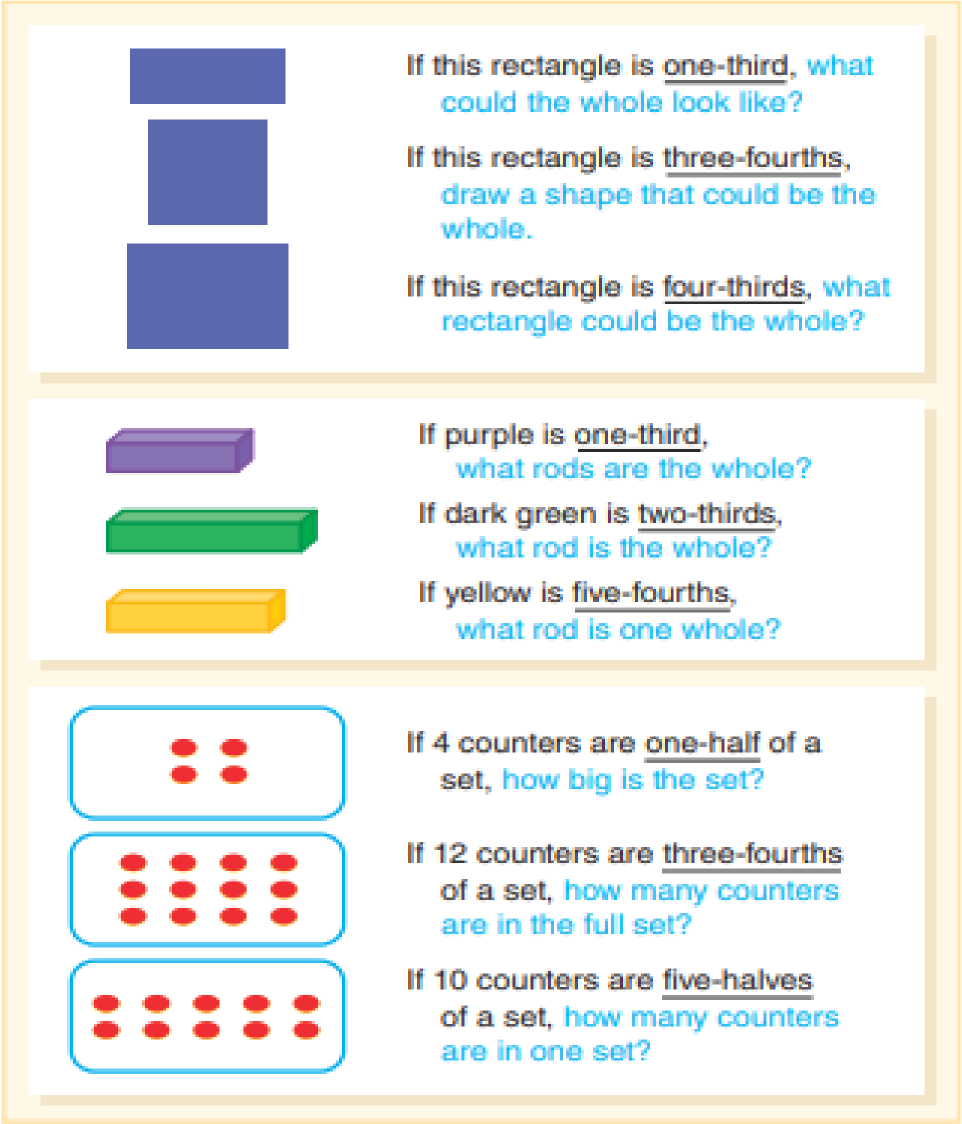


FIGURE 15.11 Given the part and the fraction, find the whole.

Numérateur - itération

• Trouver le « TOUT » à partir d’une fraction et d’une partie

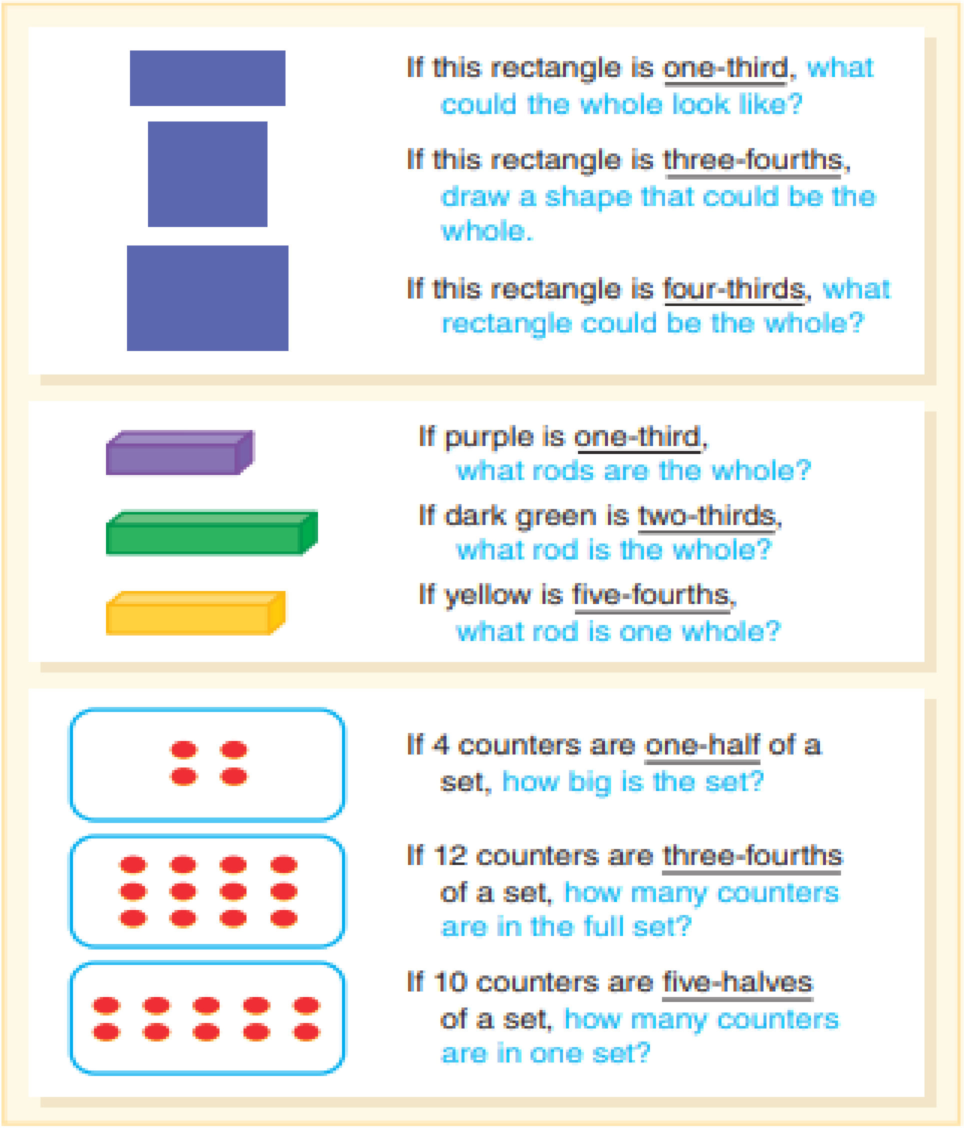


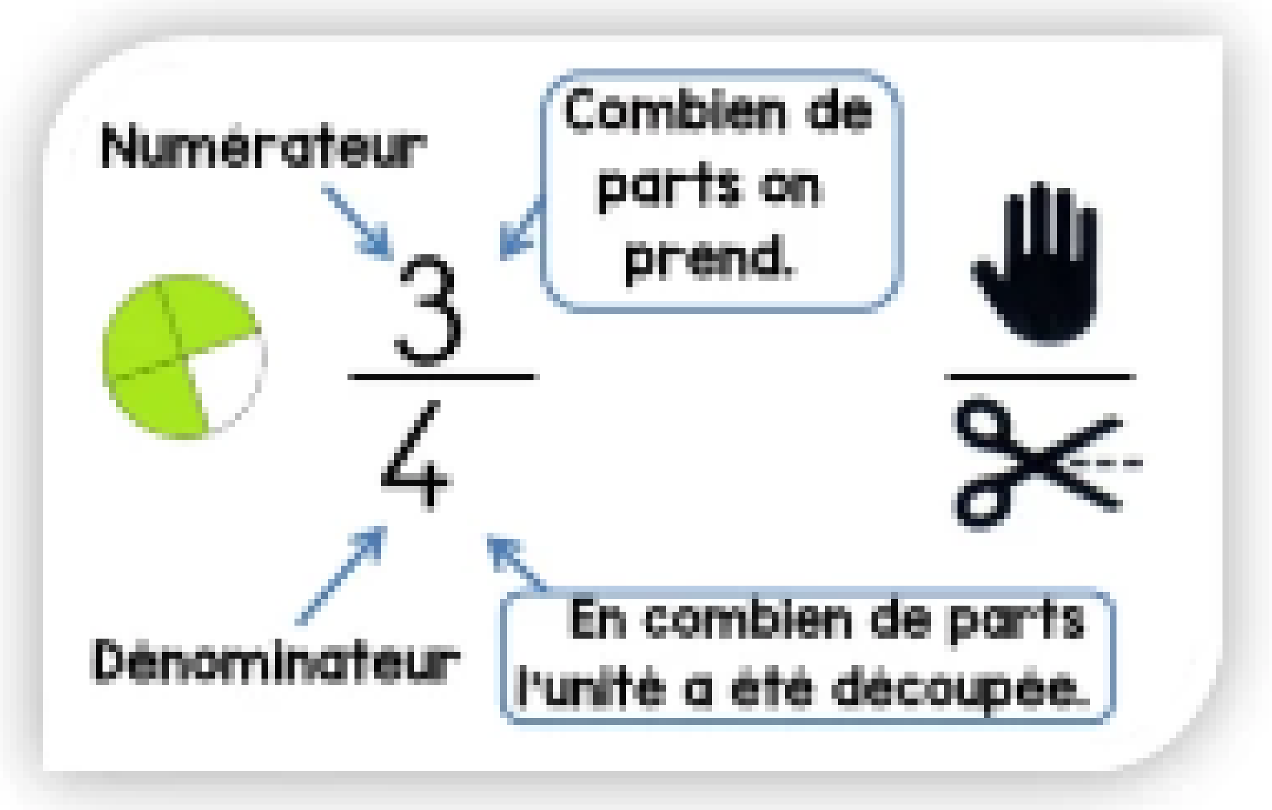
FIGURE 15.11 Given the part and the fraction, find the whole.

Numérateur - itération

- Un point est fondamental : il faut penser aux fractions comme des multiplications d’un nombre (le numérateur) par une nouvelle unité (qui vaut 1/n, où n est le dénominateur).
- Par exemple, 2/9, c’est deux fois « un neuvième » : tout se passe comme si on avait changé d’unité, et qu’on comptait à présent en neuvièmes.

Numérateur - itération

- Et non pas

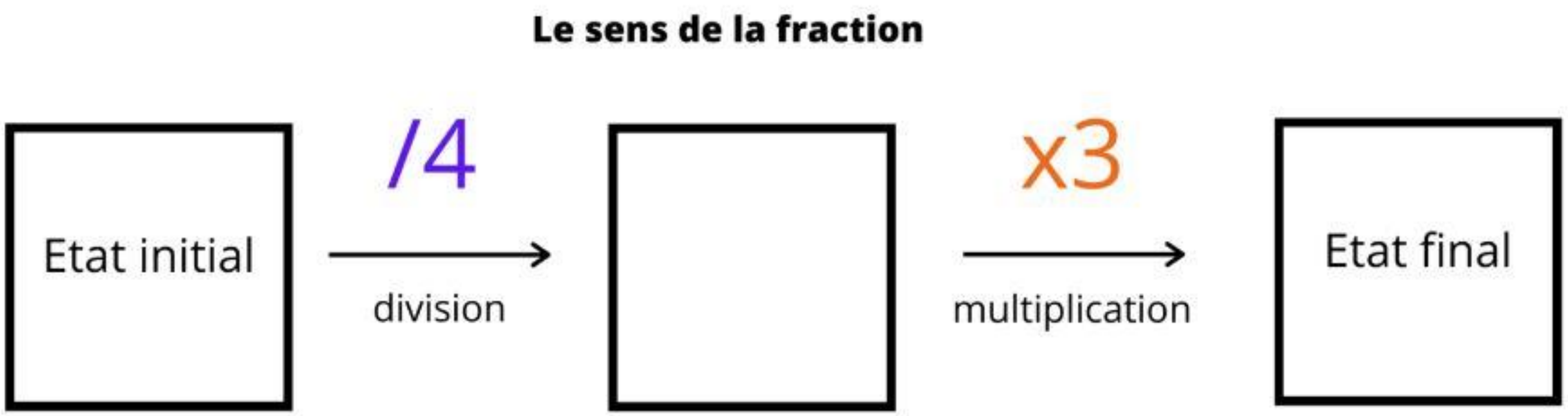


LES FRACTIONS : Fractions babyloniennes

- Les sumériens concevaient la fraction 1/n comme « l'inverse de n »
- Pour la fraction m/n, les mathématiciens babyloniens l'exprimaient, au moyen de la formule :

« m fois l'inverse de n »

En verlan


Le sens de la fraction
/4
x3
Etat initial
division
multiplication
Etat final

Numérateur - itération

- On évite ainsi :
- **Inclusion**

- Ex : dans le cas de la fraction quotient, partager 3 gâteaux entre 6 personnes en utilisant la fraction 3/6 représente deux groupes distincts : le tout (les personnes) et les parties (les gâteaux) n'appartiennent pas à la même catégorie ou groupe.

Numérateur - itération

- On évite ainsi :
- **Taille**

- Les fractions comme 2/3 et 4/5 ont du sens pour les élèves avec cette interprétation car elles correspondent à la compréhension traditionnelle des fractions. Cependant, les fractions comme 7/5 et 10/13 peuvent être déroutantes car il semble difficile de prendre plus de parties que le tout.

Préconisations

Préconisations

1. Proposer une règle généralisable qui décrit avec précision à la fois les fractions inférieures à un et celles supérieures à un, en mettant l'accent sur la compréhension du numérateur et du dénominateur.

- Interpréter une fraction $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ comme la quantité formée par a parties de taille $\frac{1}{\mathrm{b}}$ et ne pas utiliser la phrase traditionnelle entendue dans toutes les salles de classe : «$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ représente a parties sur b parties égales »

Préconisations

2. Mettre l'accent sur le fait que les fractions sont des nombres en faisant largement usage des droites numériques pour représenter les fractions et les décimales.

3. Dès le début, pour mettre l'accent sur les fractions impropres et les équivalences entre fractions.

4. Offrir divers modèles pour illustrer les fractions.

Préconisations

5. Donner de l'importance aux fractions en tant que résultat de divisions.

6. Proposer des activités où les élèves mettent en œuvre les principes de partition et d’itération.

2e partie

Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

Quelques notions à conforter avant d'aborder formellement les fractions

- Connaître les tables de multiplication de 2 à 9 ;
- connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié, triple, quart d'un nombre entier ;
- Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30, 60 ;
- Connaître et utiliser les expressions : double, moitié, quart, triple, tiers ;

UN PEU D’HISTOIRE

L’INSUFFISANCE DES NOMBRES ENTIERS ET L’ARRIVÉE DE NOUVEAUX NOMBRES...

- Les fractions
- Les nombres décimaux

En classe

Proposer des situations :

pour exprimer le résultat d’un mesurage ;

pour indiquer un emplacement particulier sur la droite numérique ;

pour déterminer ou approcher le quotient de deux nombres entiers (partager un gâteau entre 4 personnes ou deux gâteaux entre trois personnes)

LES FRACTIONS : Le papyrus de Rhind

- Papyrus presentant 87 problemes ;
- Le problème 6 du papyrus Rhind :

Partager 9 pains entre 10 hommes.

- Réponse :

Tu devras effectuer 10 fois (2/3 + 1/5 + 1/30)

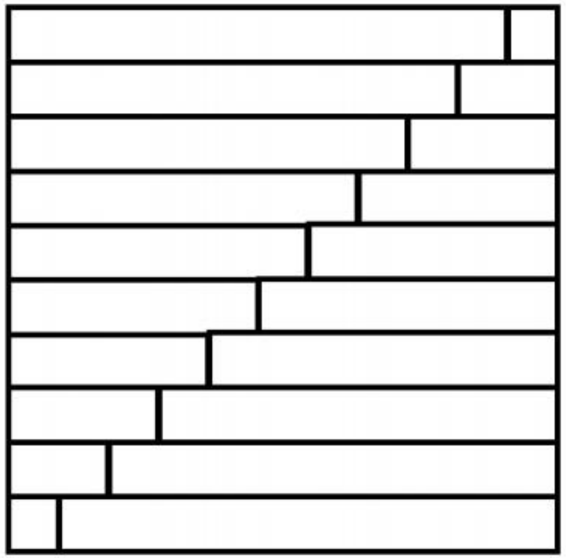
Les seules fractions utilisées par les Égyptiens, à l'exception de 2/3, sont des fractions de numérateur 1.

Significations multiple des fractions.

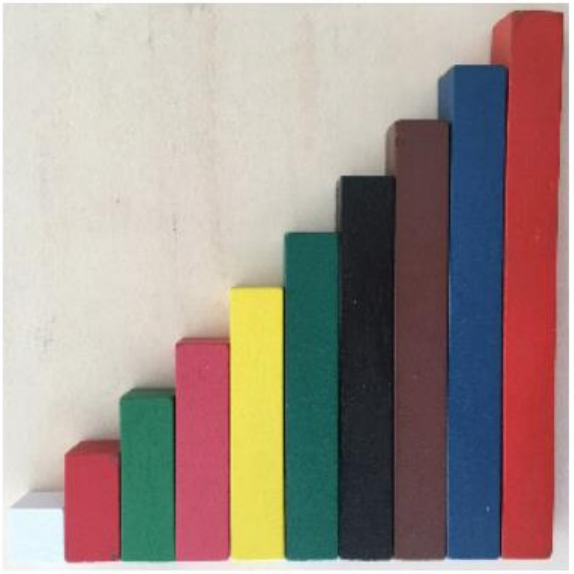
L'utilisation de fractions unitaires facilite la compréhension des fractions

Le sens du fractionnement de l’unité en parties égales est important à acquérir pour la compréhension des fractions, des fractions décimales et donc de la numération décimale de position.

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux



Bandes de papier



Réglettes Cuisenaire

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Découverte des fractions, en commençant par des fractions simples

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Découverte des fractions, en commençant par des fractions simples

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

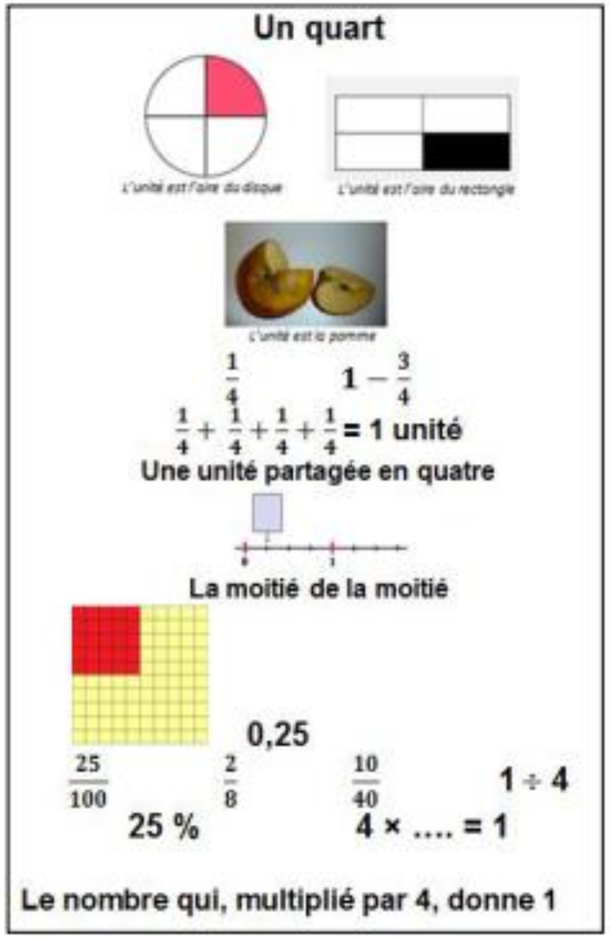
- Découverte des fractions, en commençant par des fractions simples

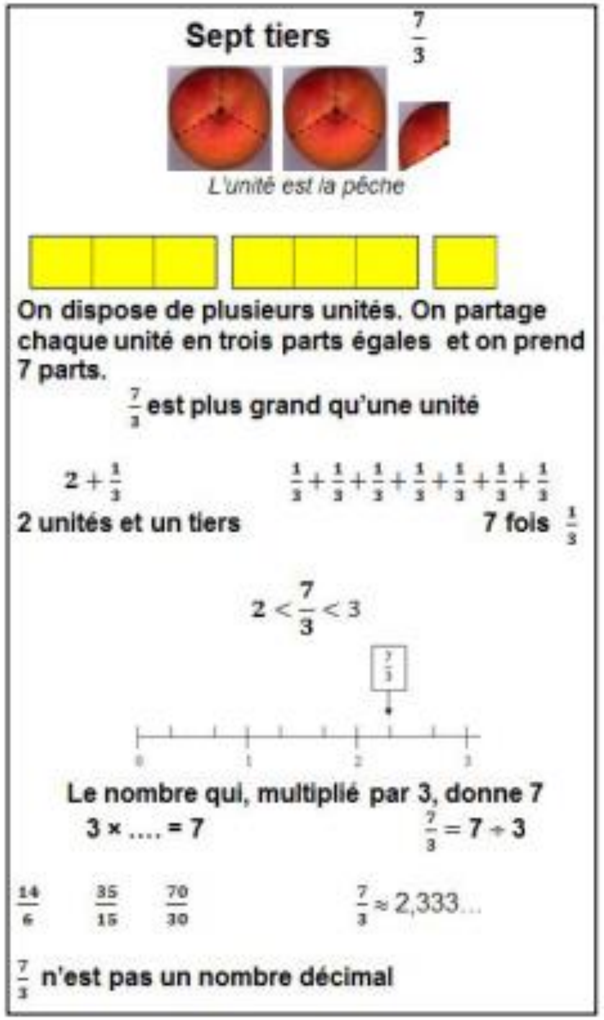
Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Découverte des fractions, en commençant par des fractions simples

Stratégies d’enseignement : des fractions simples a

• Établir une sy n fonction du travail mené



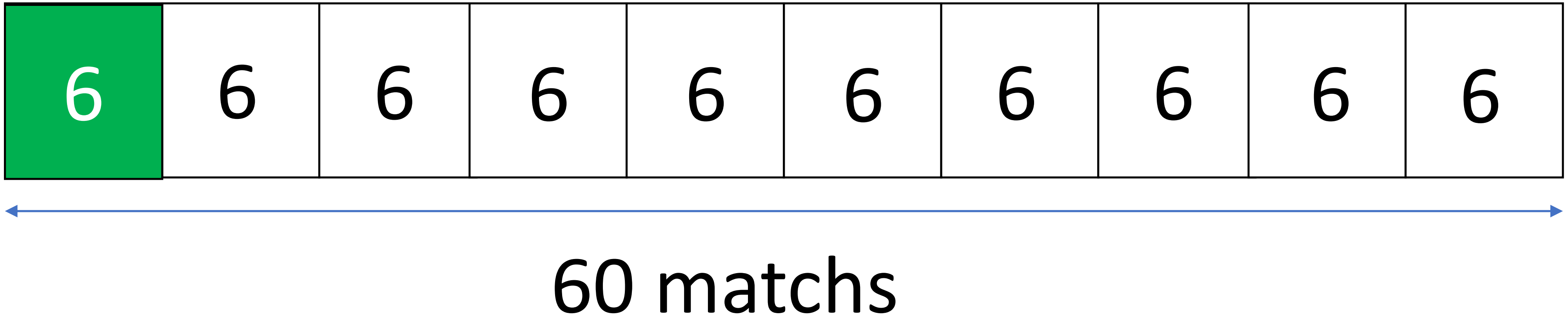


Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Découverte des fractions, en commençant par des fractions simples
- L'écriture fractionnaire
- Les fractions simples comme opérateurs (problèmes de groupement et partage) en utilisant le modèle en barres,
- *Les Lasers ont remporté 1/10 des 60 matchs qu'ils ont disputés contre les Dynamos.*
- *Combien de matchs les Lasers ont-ils gagnés ?*

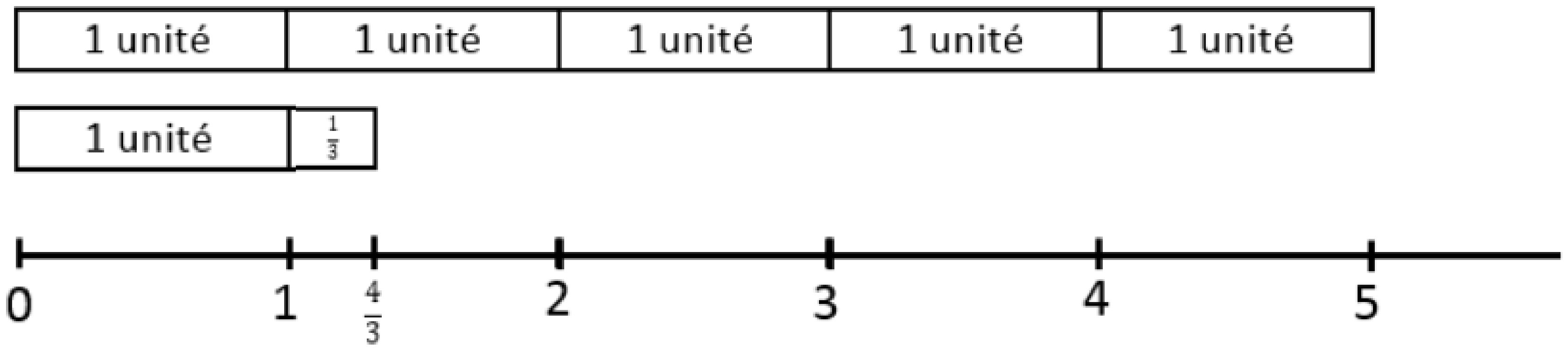
Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- *Les Lasers ont remporté 1/10 des 60 matchs qu'ils ont disputés contre les Dynamos.*
- *Combien de matchs les Lasers ont-ils gagnés ?*



Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Découverte des fractions, en commençant par des fractions simples
- L'écriture fractionnaire
- Les fractions simples comme opérateurs
- Repérage sur une demi-droite-graduée



Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Découverte des fractions, en commençant par des fractions simples
- L’écriture fractionnaire
- Les fractions simples comme opérateurs
- Repérage sur une demi-droite-graduée
- De la fraction simple à la fraction décimale

Les nombres décimaux

- Les nombres décimaux (également appelés fractions décimales) sont une façon d'écrire des fractions dans le système de base dix (dénominateurs de 10, 100, etc.).
- La virgule est une convention qui a été développée pour indiquer la position de l'unité.

Renforcer le travail sur les aspects décimal et positionnel de la numération que nous utilisons

Difficultés des élèves en entrée en sixième avec les grands nombres et les nombres décimaux

- La maîtrise des nombres entiers est cruciale pour comprendre les nombres décimaux (Tempier, Desmet)

- Construction insuffisante des nombres entiers d'usage courant (inférieurs à dix-mille)

- Accent sur les unités de numération des entiers à l'école primaire

- Base nécessaire pour les concepts décimaux

Difficultés des élèves en entrée en sixième avec les grands nombres et les nombres décimaux

- L'idée essentielle est qu'il est crucial de développer une compréhension solide de la numération positionnelle des nombres entiers

Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Universalité du système de numération décimale
- Principes fondamentaux du système décimal (position, décimal)
- Efficacité et origines du système en base dix
- L'introduction précoce des unités de numération à l'école primaire améliore la compréhension de notre système de numération (Tempier, Chambris, Houdement).

Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Les deux aspects de la numération, aspects positionnel et décimal, enjeux essentiels dès le cycle 2 :

« *unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres*) » et « *valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre (principe de position)* ».

Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

...	1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1
	Million	Centaine de milliers	Dizaine de milliers	Millier	Centaine	Dizaine	Unité

Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Un fondement mathématique, épistémologique et didactique : le concept d’unité

Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Trois niveaux de compréhension de Wright et de ses collègues :

(1) les enfants comprennent dix comme dix unités ;

(2) les enfants voient dix comme une unité ;

(3) les enfants travaillent facilement avec des unités de dix.

Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Trois étapes principales que les enfants doivent franchir pour comprendre le sens des nombres à plusieurs chiffres (Fuson, 1990 ; Fuson & Briars, 1990 ; Fuson et al., 1997 ; Ross, 1989 ; Sinclair et al., 1992 ; Sinclair & Scheuer, 1993).«

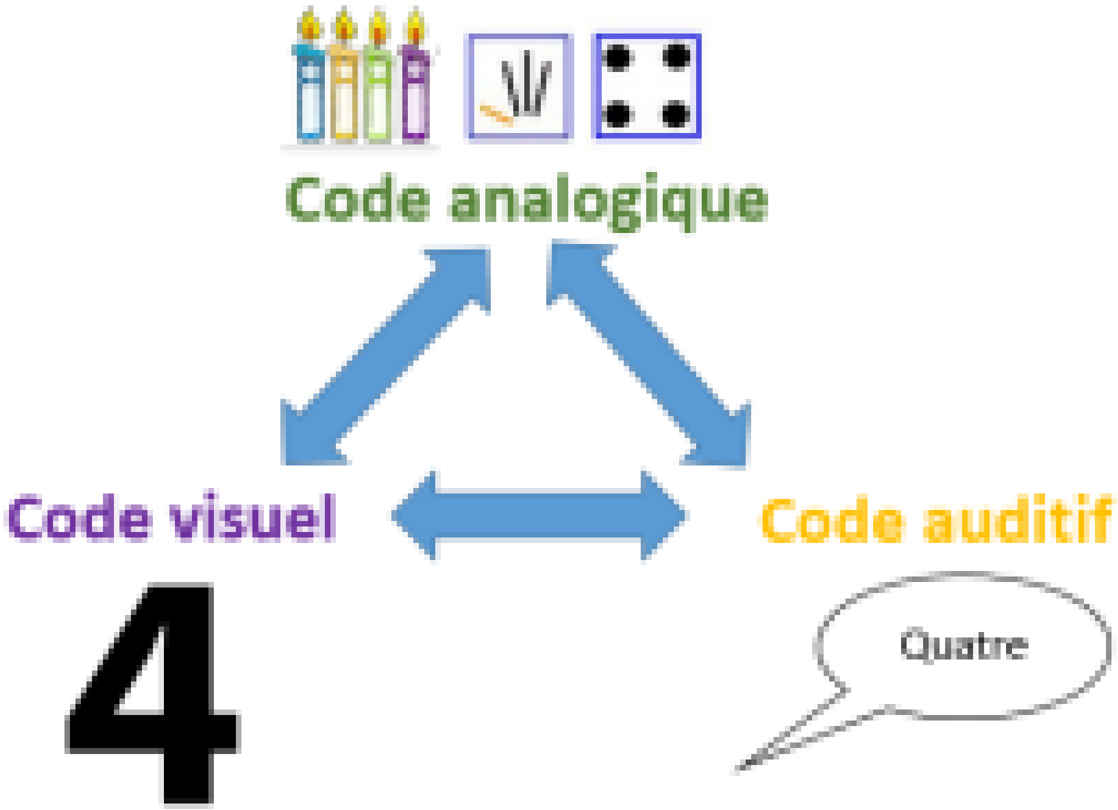
1. Individualiser et Identifier un Nombre à Plusieurs Chiffres ;
2. Comprendre les Positions et les Valeurs ;
3. Comprendre le Système de Base 10.

Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Comprendre la numération décimale, c'est comprendre des «changements d'unités de comptes» [...] (Brissiaud)
- Exemple : 347
- Baturo (2000) considère ce système d'unités comme un réseau de relations multiplicatives

Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Un troisième système de représentation des nombres

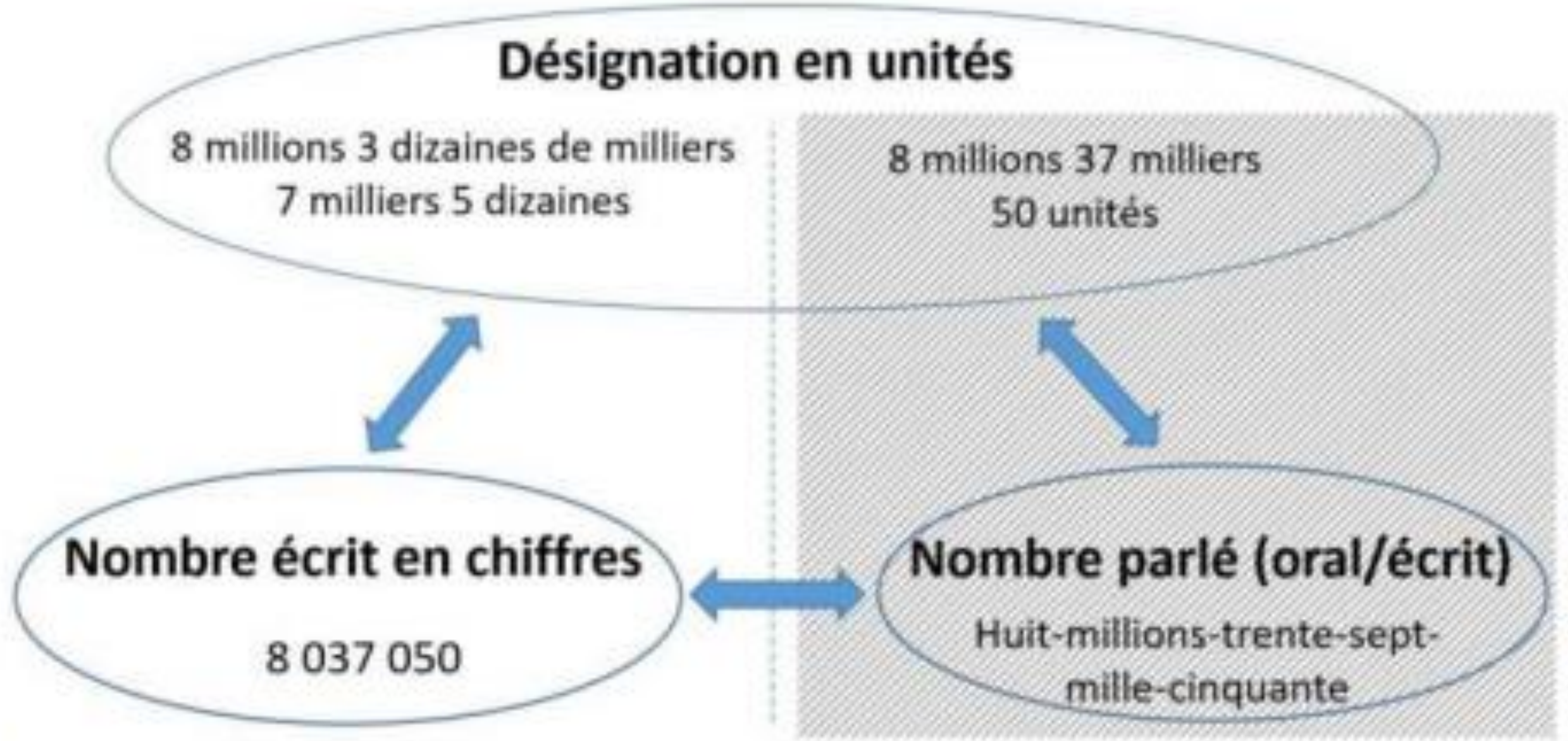


Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Un troisième système de représentation des nombres

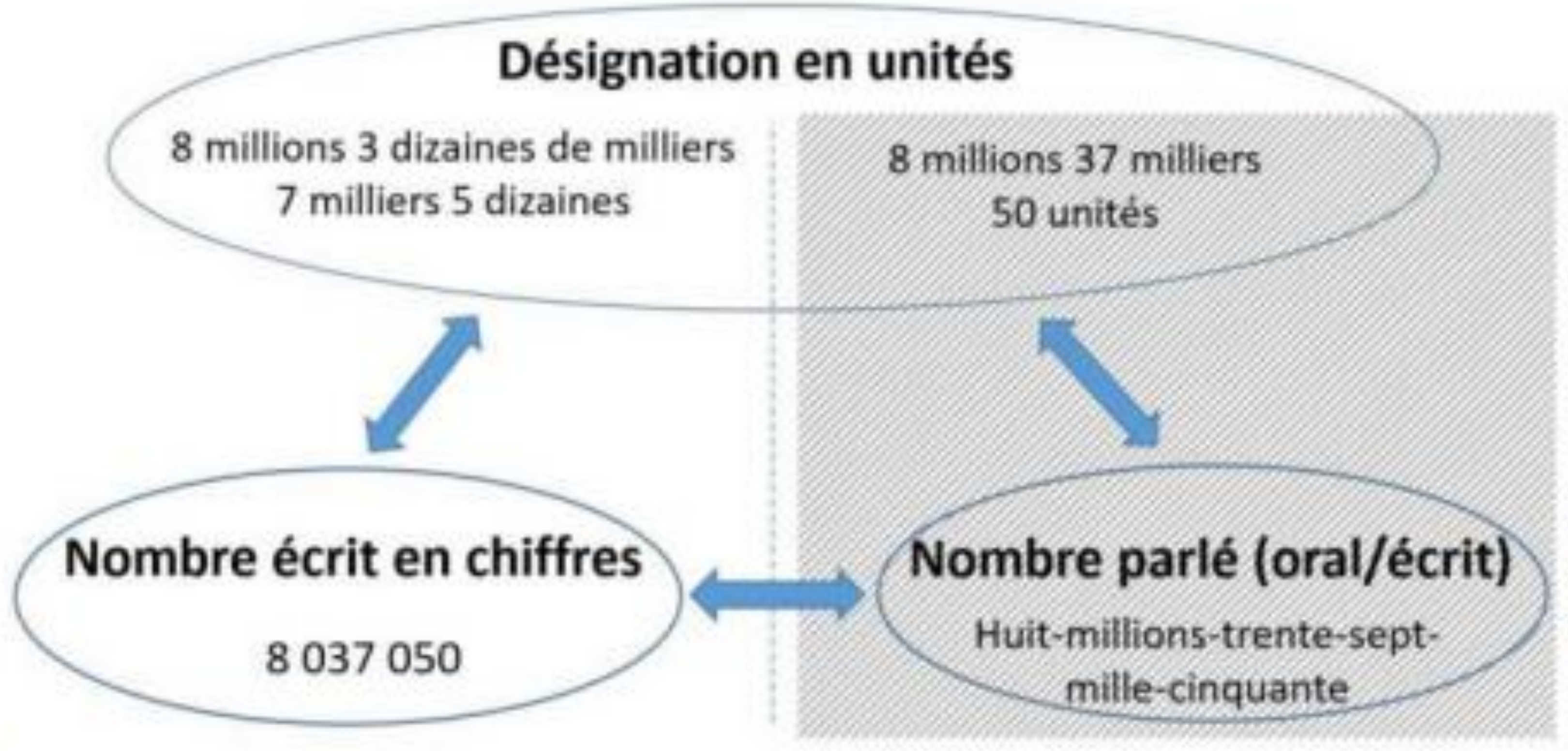
Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Un troisième système de représentation des nombres



Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Un troisième système de représentation des nombres



Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- ABCDEF
- ABC (base 10) mille DEF

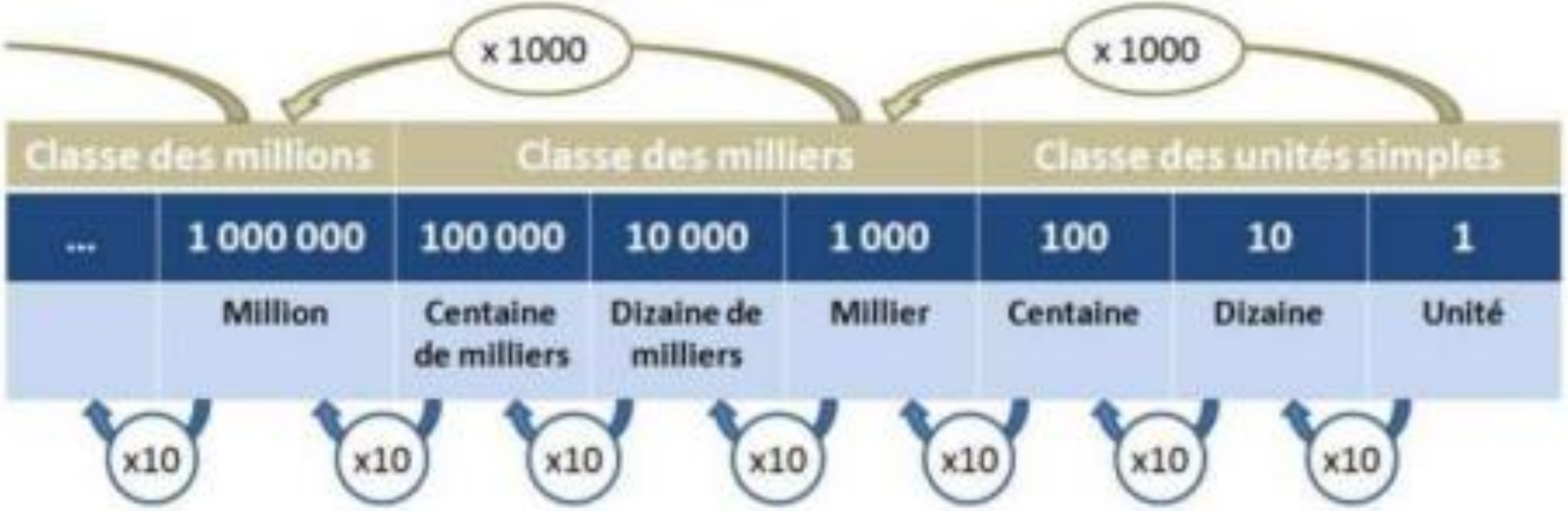


Figure 5 : Le double système d'unités base dix - base mille.

Comprendre la numération positionnelle avec les unités de numération

- Les recherches préconisent un travail sur les compositions et décompositions en unités de numération en cycle 2 comme en cycle 3.
- Mettent en jeu conjointement les deux principes de la numération
- Mobilisées dans d'autres domaines des mathématiques comme le calcul

Composer et décomposer un nombre selon différentes unités

- Composer un nombre signifie passer d'une écriture en unités de numération à une écriture en chiffres.

- Par exemple, 3 centaines, 2 dizaines et 1 unité se compose en 321.

- Décomposer un nombre implique l'inverse : passer d'une écriture en chiffres à une écriture en unités de numération. Par exemple, 321 se décompose en 3 centaines, 2 dizaines et 1 unité.

- La capacité à composer et décomposer des nombres est fondamentale pour développer une compréhension approfondie de la numération décimale

Composer et décomposer un nombre selon différentes unités

- Le cas des compositions et décompositions « canoniques »

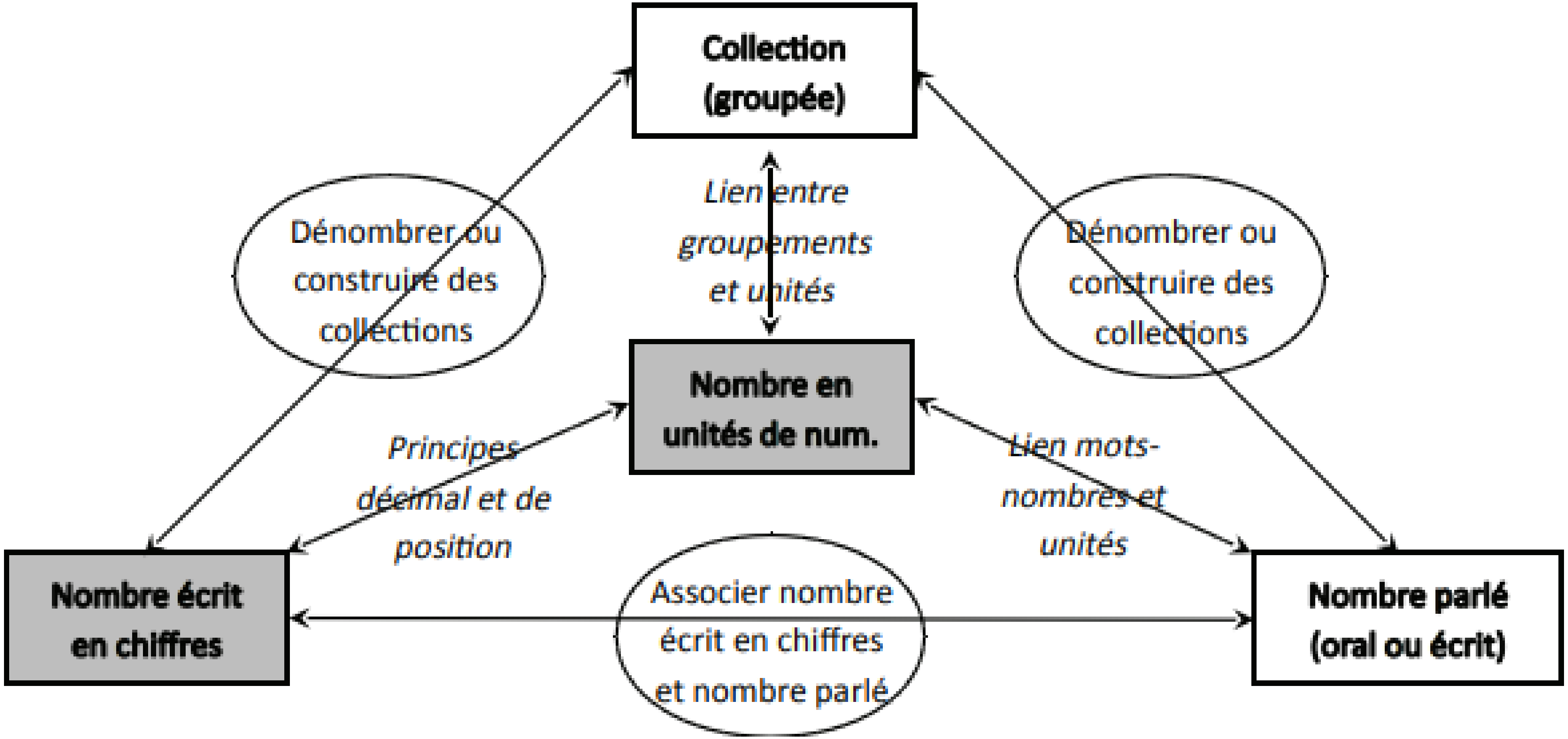
	composer un nombre à partir de plusieurs unités	décomposer un nombre à partir de plusieurs unités
Exemple de tâche	Écrire en chiffres le nombre 2 milliers 4 dizaines 5 unités	écrire le nombre 2045 en milliers, centaines, dizaines et unités
Une technique de référence	écrire le nombre de milliers (quatrième rang à partir de la droite), marquer l'absence de centaine par l'écriture d'un « 0 » au 2e rang, etc.	le quatrième chiffre (en partant de la droite) donne le nombre de milliers, le troisième le nombre de centaines, etc.
Savoirs associés	principe de position de la numération	

Composer et décomposer un nombre selon différentes unités

- Les cas non canoniques - mise en jeu des relations entre unités

	composer un nombre à partir de plusieurs unités	décomposer un nombre à partir de plusieurs unités
Exemple de tâche	Écrire en chiffres le nombre 5 unités 64 centaines 2 milliers	écrire le nombre 8405 en unités et centaines
Une technique de référence	convertir les unités pour lesquelles il y a p l u s d e 1 0 u n i t é s : 64 centaines = 6 milliers 4 centaines. ajouter les unités de même ordre 6 milliers et 2 milliers ; on est alors ramené au cas avec moins de 9 unités...	décomposer de manière canonique : 8 milliers 4 centaines 5 unités ; convertir les milliers en centaines (8 milliers = 80 centaines) et ajouter les centaines (84 centaines).
Savoirs associés	les relations entre unités (principe décimal de la numération)	

Composer et décomposer un nombre selon différentes unités



Composer et décomposer un nombre selon différentes unités

- Lien avec d'autres notions mathématiques :

1. Calcul posé (593 + 345) ;
2. Calcul mental (80 + 345) ;
3. Grandeurs et mesures ;
4. Nombres décimaux (32,07)

Importance des unités de numération et de leurs relations.

Composer et décomposer un nombre selon différentes unités

- **Situations de référence**
- Trouver plusieurs décompositions d'un nombre en unités, en dizaines, en centaines ou en milliers.

Composer et décomposer un nombre selon différentes unités

- **Le « Number expander »**

				236	**unités**
2	centaines	3	dizaines	6	**unités**
2	centaines			36	**unités**
		23	dizaines	6	**unités**

Composer et décomposer un nombre selon différentes unités

- **Le « Number expander »**

Préconisation n°1

- Renforcer le travail sur les aspects décimal et positionnel de la numération que nous utilisons :

- Manipuler et travailler sur des représentations pour faire des groupements par 10 (de 10 unités, de 10 dizaines, de 10 centaines), puis pour casser ces dizaines lors du calcul de différences.

- Travailler avec différentes écritures :-34 = 4u + 3d = 14u + 2d = 24 +10…-453 = 3u + 45d = 53u + 4c = 400 + 50 + 3…

- Utiliser le calcul mental pour renforcer la compréhension de la numération:-54 –10 = ?, 35 –15 = ?-756 –50 = ?, 746 –300 = ?, 2367 –300 = ?

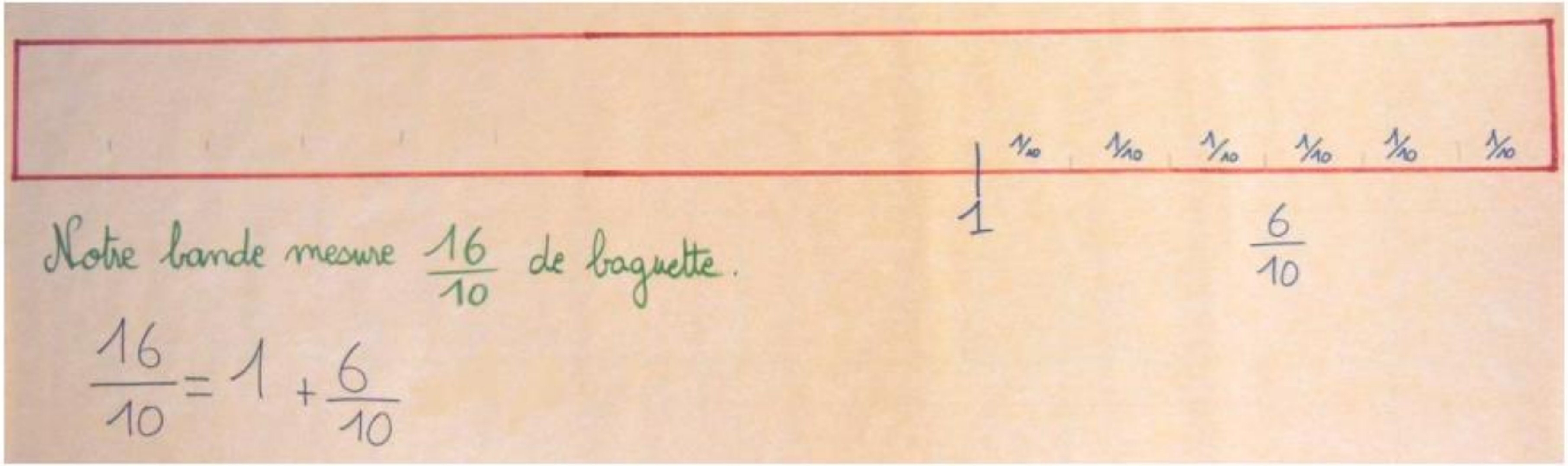
Renforcer la place des demi-droites graduées tout au long du cycle 2 et du cycle 3.

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- De la fraction simple à la fraction décimale

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- De la fraction simple à la fraction décimale



Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- De la fraction simple à la fraction décimale avant l’écriture à virgule

- Fournir des modèles visuels et mettre l'accent sur la prononciation sont deux éléments importants pour l'enseignement des fractions décimales.

- Modèles de surfaces avec le carré de 10 cm utilisé comme les "centaines", représentent désormais l'unité, soit 1. Chaque bande représente alors un dixième, et chaque petit carré équivaut à un centième.

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

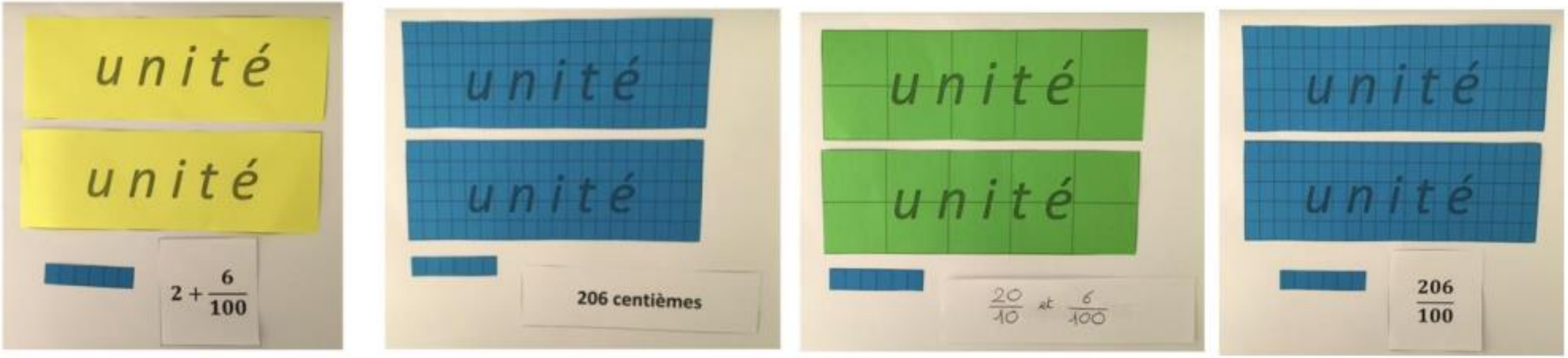
- De la fraction simple à la fraction décimale

Exemples de cartes

206 centièmes	2 unités et 6 centièmes	$2+\frac{6}{100}$	$\frac{26}{100}$
26 dixièmes	$\frac{20}{10}+\frac{6}{100}$		

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- De la fraction simple à la fraction décimale



Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Il est important d'aider les élèves à comprendre que les fractions décimales peuvent être exprimées de différentes manières.
- Par exemple, la fraction décimale 0,65 peut être lue comme « soixante-cinq centièmes », « six dixièmes et cinq centièmes ».

Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

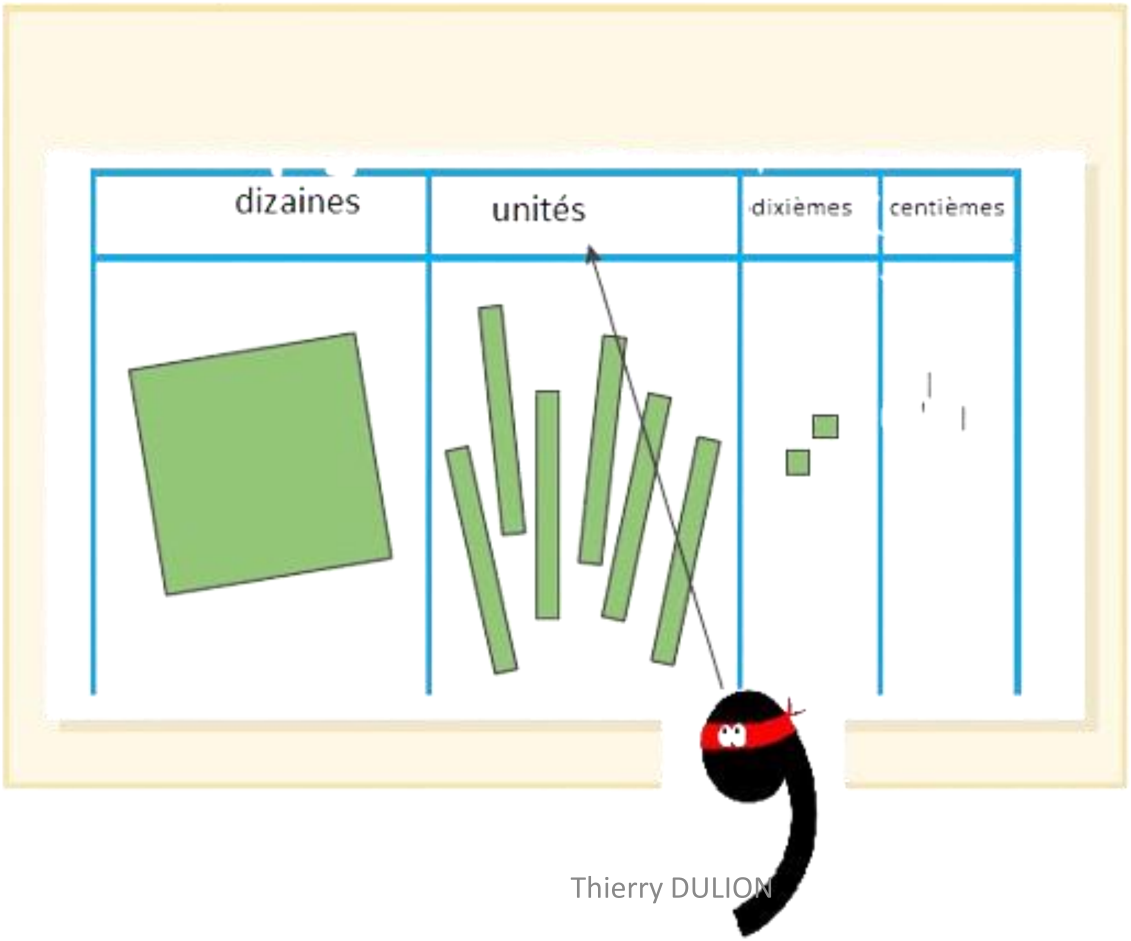
- Enseigner l’écriture à virgule comme un simple changement de notation.
- Faire oraliser systématiquement les nombres à virgule, en explicitant les dixièmes, centièmes, etc.
- Utiliser le mot "et" pour représenter la virgule. Par exemple, dites "un et seize centièmes" au lieu de "un virgule seize".
- Encouragez vos élèves à utiliser ce langage lorsque vous discutez de fractions décimales.
- Donner toutes les décompositions possibles : 1,16 (1 unité et 1 dixièmes et 6 centièmes, 1 unité et 16 centièmes, 116 centièmes)

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Extension du système de valeur de position
- Aider les élèves à comprendre qu'une relation de 10 pour 1 s'étend à l'infini dans deux directions
- La symétrie du système se situe autour de la place des unités (dizaines à gauche de la place des unités, dixièmes à droite, et ainsi de suite) – et non (idée fausse courante) d'une symétrie autour de la virgule.
- La virgule « regarde » toujours le nom de la position de l'unité.

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- La virgule « regarde » la position de l'unité.

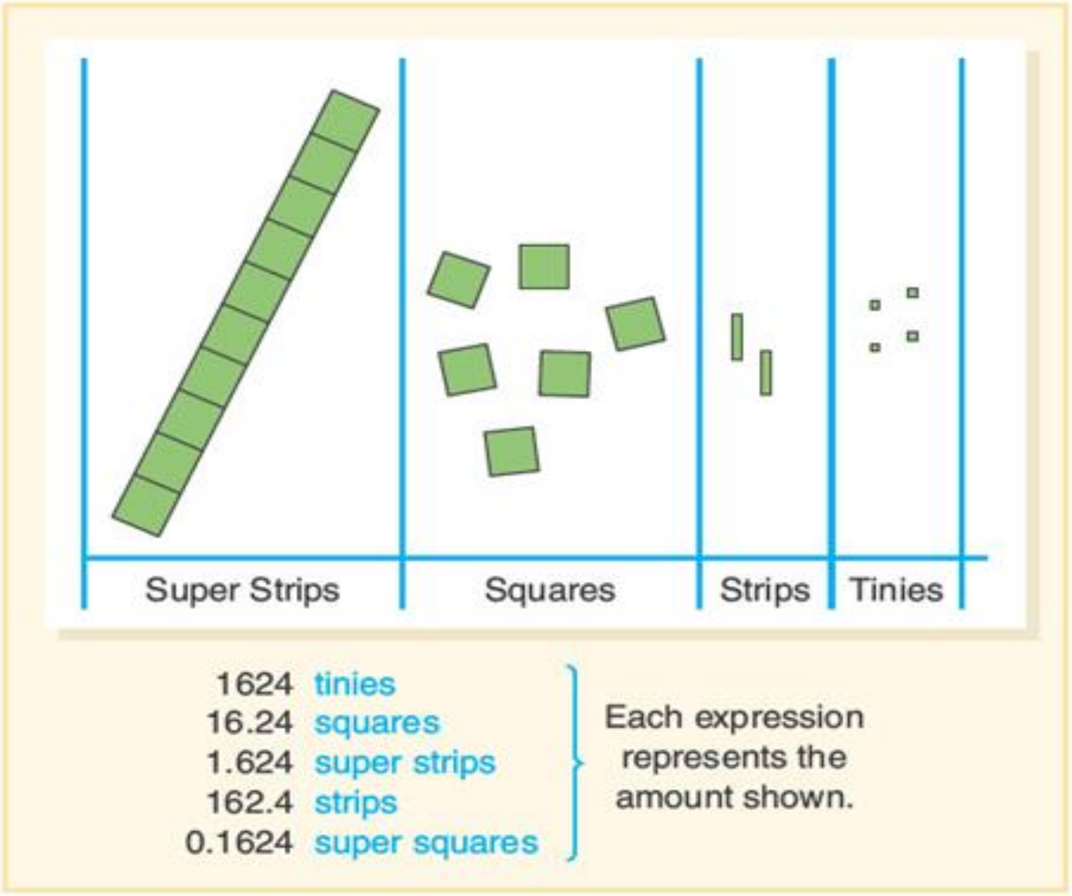


Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- **Exemple de jeu "Changement d'unités"**
- **Matériels**
- Matériaux en Base Dix ou blocs en base dix
- Distribuez aux élèves une collection de Matériaux en Base Dix ou blocs en base dix.
- Demandez-leur de choisir un mélange spécifique, par exemple, trois plaques, sept bandes et quatre carrés.
- Choisissez par exemple la bande comme unité.
- Demander leur d’écrire le nombre correspondant (37,4)
- Répétez avec différentes unités puis différentes combinaisons
- Incluez des exemples où une pièce n'est pas représentée afin que les élève comprennent mieux les valeurs décimales telles que 3,07.

Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- **Exemple de jeu "Changement d'unités"**



Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- **Exemple de jeu "Calculatrice pour Compter les Décimaux »**
- Changez pour appuyer sur 0,1 (=) (=) pour comprendre les décimales.
- Arrêtez-vous lorsque l'affichage montre 0,9 et discutez de sa signification.
- Discutez des prédictions erronées comme 0,10 et pourquoi elles diffèrent.
- Échangez 10 dixièmes pour obtenir 1 entier et observez le changement sur la calculatrice.
- Comptez jusqu'à 4 ou 5 dixièmes pour comprendre la transition entre les nombres entiers.
- Encouragez à compter à voix haute pour renforcer le vocabulaire mathématique.
- Expliquez le concept des places "pleines" et le passage à la position suivante.
- Une fois les dixièmes maîtrisés, essayez de compter par 0,01 ou 0,001 pour comprendre le centième et le millième.
- Réalisez que 10 comptes par 0,001 donnent 0,01 et 1000 comptes équivalent à 1.

Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Les modèles de longueur sont un outil précieux pour l'enseignement des fractions décimales.
- Ils peuvent aider les élèves à visualiser la relation entre les fractions décimales et les longueurs physiques, à comparer des fractions décimales et à réfléchir à la valeur de position.

Stratégies d’enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Connecter les Fractions et les Décimales (1/4 = 0,25)

Les pratiques d'adultes sources de difficulté

- La façon d'écrire, de lire et de dire les nombres décimaux (« 3 virgule 8 »).
- Dans la vie quotidienne, l'utilisation des nombres décimaux renforce l'idée de juxtaposition de deux entiers (7€35 ou 7h35min).
- Les techniques de calcul, pour ces nombres, sont les mêmes que pour les entiers.
- Les « recettes » mnémotechniques employées parfois pour la comparaison des nombres décimaux.
- Continuité VS discontinuité

Les obstacles

Ces difficultés masquent

la nature de « fraction »

des nombres décimaux et peuvent conduire de très nombreux élèves à les assimiler à des entiers.

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

- Découverte des fractions, en commençant par des fractions simples
- L'écriture fractionnaire
- Les fractions simples comme opérateurs
- Repérage sur une demi-droite-graduée
- De la fraction simple à la fraction décimale
- Comparaisons de fractions décimales et demi-droite graduée
- Calculs avec des fractions décimales

LES DECIMAUX : DES MOUTONS … AUX NOMBRES DECIMAUX

Au début, il n'y avait rien.

Même pas 1,
Même pas 2,
Même pas 10.
Et surtout pas 0.

<u>Et les moutons sont arrivés.</u>

Oui, oui, les moutons.

Le berger, le matin, faisait sortir son troupeau de la bergerie.
Le soir, il le faisait rentrer.

Pour être sûr de ne pas perdre de moutons, il avait un sac et un tas de cailloux.

Le matin, chaque fois qu'un mouton sortait de la bergerie, il mettait un caillou dans son sac.

Le soir, chaque fois qu'un mouton rentrait dans la bergerie, il enlevait un caillou du sac.

Ainsi, s'il lui restait des cailloux dans le sac, il savait qu'il lui manquait des moutons.
Il savait même combien il lui en manquait.

En latin, caillou se dit
<u>calculus</u>.

C'est de là que vient le mot calcul.

Comme on ne trouvait pas de cailloux partout (en plus, ce n'est pas très pratique: pour compter le nombre de cheveux que l'on a sur la tête, il en faut ... beaucoup!) les hommes ont inventé des symboles pour écrire les nombres. Chacun a ses symboles et sa façon de les placer:

<u>Les grecs</u>: $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ρυ.,ξλπδ pour un million cinq cent sept mille neuf cent quatre vingt quatre.

<u>Les égyptiens</u>:  pour mille deux cent quarante cinq

<u>Les romains</u>: MDCCLXXXIX pour mille sept cent quatre vingt neuf.

<u>Les arabes</u>: 1329 pour mille trois cent vingt neuf.

Et puis tout le monde a trouvé ça astucieux, la numération arabe.

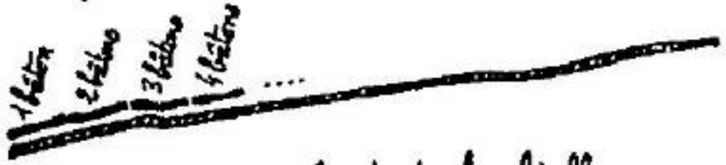
Alors tout le monde l'a utilisée.

Et on a vécu comme ça pendant quelques centaines d'années. On pouvait compter les moutons, les gâteaux, les maisons ...

Et puis un jour, un homme a voulu mesurer une ficelle:

avec un bâton:

Il a reporté plusieurs fois le bâton sur sa ficelle:



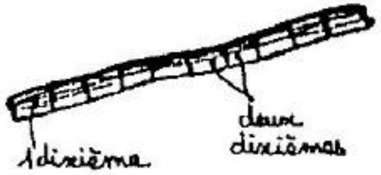
Mais arrivé au bout de la ficelle, problème !!

la ficelle mesurait plus que 11 bâtons, mais moins que 12 bâtons.

Ça n'allait pas. Ce n'était pas précis

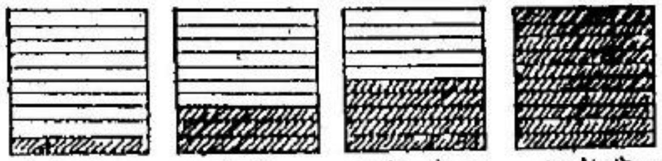
Alors, il a décidé de partager son bâton en 10 parties égales :
un petit bout faisait un dixième de bâton,
le bâton tout entier faisait dix dixièmes :

le bâton :



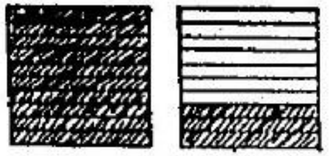
et il a dit :
« Ma ficelle mesure
11 bâtons et 4 dixièmes de bâton. »

Il était content.
Rentré chez lui, il a fait la même chose avec un carré :



1 dixième de carré | 3 dixièmes de carré | 5 dixièmes de carré | 10 dixièmes de carré = 1 carré

Il a même continué :



13 dixièmes de carré
= 1 carré + 3 dixièmes

24 dixièmes de carré = 2 carrés + 4 dixièmes

Pour éviter d'avoir à dessiner tout cela, on utilise l'écriture fractionnaire :

On écrit 1 dixième : $\frac{1}{10}$

et 3 dixièmes : $\frac{3}{10}$

et 24 dixièmes : $\frac{24}{10}$.

Et si on regarde bien les carrés, là-haut, on voit que $\frac{13}{10} = 1 + \frac{3}{10}$

et que $\frac{24}{10} = 2 + \frac{4}{10}$.

Essaie, toi :

$\frac{17}{10} = \dots + \frac{\dots}{10}$ $\qquad$ $\frac{35}{10} = \dots + \dots$

$\frac{23}{10} =$ $\qquad$ $\frac{70}{10} =$

$\frac{232}{10} =$

$\frac{128}{10} =$

Et dans l'autre sens :

$5 + \frac{2}{10} = \frac{\dots}{10}$ $\qquad$ $7 + \frac{8}{10} = \dots$

$23 + \frac{9}{10} = \dots$ $\qquad$ $12 \quad = \frac{\dots}{10}$

Et dans tous les sens :

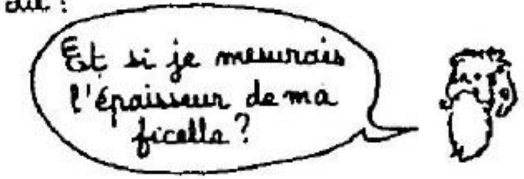
$15 + \dots = \frac{157}{10}$ $\qquad$ $28 + \dots = \frac{280}{10}$

$\dots + \frac{3}{10} = \frac{73}{10}$ $\qquad$ $\dots + \dots = \frac{11}{10}$.

Bon

Mais ce n'est pas tout.

Un jour, l'homme de tout à l'heure s'est dit :



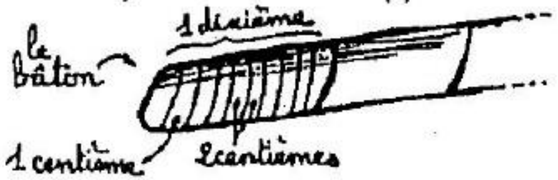
Ça a donné ceci :

Ça recommence : un dixième de bâton, c'est trop gros.

Bon. Je vais faire comme tout à l'heure se dit-il. Je vais partager mes dixièmes du bâton en 10 parties chacun.

10 petites parties dans 1 dixième ; et 10 dixièmes en tout : ça me fera donc 100 petites parties dans mon bâton.

Un petit bout s'appelle 1 centième:

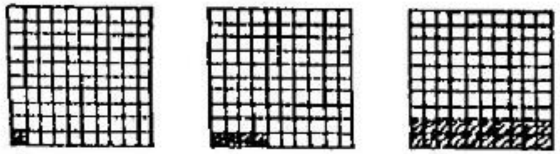


(Nous, on écrit: 1 centième $= \frac{1}{100}$

3 centièmes $= \frac{3}{100}$

etc...)

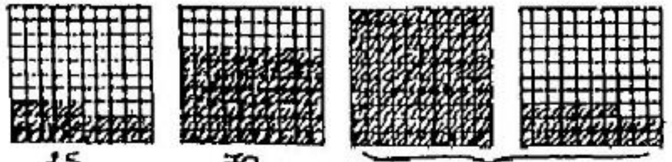
Ensuite il est rentré chez lui, et il a retrouvé ses carrés:



$\frac{1}{100}$ $\frac{4}{100}$ $\frac{20}{100}$

« Tiens, se dit-il. $\frac{20}{100}$, c'est pareil que $\frac{2}{10}$. »

Il continue:



$\frac{25}{100}$ $\frac{70}{100}$ $\frac{127}{100}$

Ah

Alors $\frac{20}{100} = \frac{2}{10}$, mais aussi:

$\frac{25}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$; $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$;

$\frac{127}{100} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100}$

À toi:

$\frac{37}{100} = \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100}$; $\frac{54}{100} = \quad +$

$\frac{40}{100} =$; $\frac{142}{100} =$

Dans l'autre sens:

$\frac{2}{10} + \frac{7}{100} = \frac{\dots}{100}$; $3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} = \frac{\dots}{100}$

$1 + \frac{2}{100} = \frac{\dots}{100}$; $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} = \frac{\dots}{100}$

$\dots + \frac{3}{10} + \frac{\dots}{100} = \frac{432}{100}$; $\frac{5}{10} = \frac{\dots}{100}$

$4 + \frac{7}{10} + \dots = \frac{470}{100}$; $\frac{\dots}{10} = \frac{30}{100}$

Il y a à peu près 400 ans, un comptable hollandais (il s'appelait Stevin) se dit que tout de même, ce serait mieux si on pouvait écrire tout ça d'un seul morceau...

Pouvoir écrire $2+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}$ plus simplement que $\frac{257}{100}$ ...

Il a proposé ceci :

un petit ① pour les dixièmes,
un petit ② pour les centièmes...

ainsi, $2+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}$ s'écrivait $25^{①}7^{②}$

... il a fallu attendre encore 200 ans (la révolution française) pour qu'apparaisse enfin...

,
LA VIRGULE !

On l'utilise ainsi :

$$\frac{257}{100} = \underbrace{2}_{\text{2 unités}} + \underbrace{\frac{5}{10}}_{\text{5 dixièmes}} + \underbrace{\frac{7}{100}}_{\text{7 centièmes}}$$

$$= 2,57$$

Ainsi :

$\frac{3}{10}$ = 0 unité et 3 dixièmes, donc :

$$\frac{3}{10} = 0,3$$

$\frac{54}{100}$ = 0 unité $+\frac{5}{10}+\frac{4}{100}$, donc :

$$\frac{54}{100} = 0,54$$

$$\frac{584}{100} = 5+\frac{8}{10}+\frac{4}{100} = 5,84$$

$$\frac{521}{10} = 52+\frac{1}{10} = 52,1$$

... On a appelé ça écriture décimale, et c'était parti !

Points de vigilance

- **Temps trop important consacré aux nombres entiers en début de CM1 et CM2**
    - Introduction tardive de l'écriture décimale
    - travailler sur le nombre décimal, c'est poursuivre la construction des nombres entiers
    - enrichissement progressif d'une notion sur le cycle
    - Importance du diagnostique pour organiser son enseignement et réguler les apprentissages

- **Programmation segmentée**

    Rebrassage régulier : les travaux sur les fractions décimales et les décimaux s'alimentent mutuellement [compétence Représenter]

- **Méconnaissance réciproque école-collège**

    Echanges sur la chronologie de la construction

Construction des fractions et du nombre décimal :

- **Découverte des fractions, en commençant par des fractions simples**

introduction à partir de situations dans lesquelles le nombre entier ne suffit pas,

- l'unité est matérialisée,
- varier les supports,
- rencontrer rapidement des fractions supérieures à 1
- formulations utilisant des mots (pas d'écriture symbolique)

- **Découverte de l'écriture fractionnaire, fraction d'une quantité, repérage sur une droite graduée**
- **De la fraction simple à la fraction décimale**
- **Introduction de l'écriture à virgule**

écriture à virgule : convention d'écriture

Construction des fractions et du nombre décimal

- **Comparer, ranger, encadrer et intercaler des nombres décimaux**

une seule règle pour comparer des nombres entiers ou décimaux :

Les nombres étant écrits (ou imaginés) l'un sous l'autre, on parcourt leurs chiffres de gauche à droite. Dès que l'on trouve 2 chiffres différents, on peut conclure.

Ex :

78 758	983 899	5,368	25,3
9 896	987 658	5,7	8,9856

Construction des fractions et du nombre décimal

- Calculer avec des nombres décimaux

ne pas se limiter au calcul posé