Dossier de formation

Mathématiques

PROPORTIONNALITÉ AU CYCLE 3

STRATEGIES D'ENSEIGNEMENT

Comment pratiquer la proportionnalité au CM1-CM2 ?

Dossier de formation

Auteur du dossier :

LEININGER Audrey
IEN CCPD – Circonscription de Thionville 1
audrey.leininger@ac-nancy-metz.fr

Sujet du dossier :

STRATEGIES D'ENSEIGNEMENT
Comment pratiquer la proportionnalité au CM1-CM2 ?

Domaines :

Nombres et calculs
Grandeurs et mesures
Espace et géométrie

Enseignants concernés :

PE de CM1 et CM2

Objectif du parcours de formation :

Aider les enseignants de CM1-CM2 à concevoir un enseignement plus efficace dans le domaine de la proportionnalité.

Logique d'ensemble du parcours de formation proposé dans ce dossier :

Ce dossier présente des ressources pour élaborer un parcours de formation hybride de 9h (présentiels 2 x 2h15 et travaux en groupes à distance 2 x 2h15) ainsi que les documents correspondant à chaque phase de celui-ci (documents pour les enseignants et documents complémentaires pour les formateurs).

Trois volets structurent le parcours de formation :

- un volet « Savoir » : mise au point théorique autour des connaissances mathématiques en jeu – connaissances mathématiques que le PE enseignera à ses élèves et connaissances mathématiques non enseignées aux élèves mais nécessaires au PE pour enseigner.
- Un volet « Didactique » : connaissances didactiques, spécifiques au contenu mathématique enseigné – connaissances pour le PE correspondant à des transpositions didactiques des savoirs.
- Un volet « Pédagogique » : connaissances pédagogiques relevant des conceptions de l'apprentissage, de l'organisation et de la gestion de la classe, indépendamment des contenus disciplinaires.

RESSOURCES POUR LA FORMATION

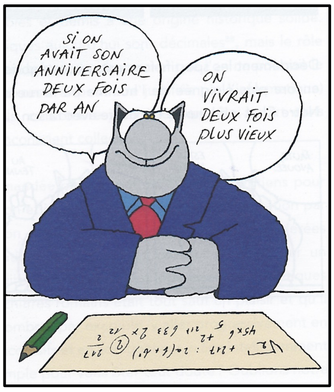
Ressource	*Titre* Intentions	*Durée*
1	*Quels sont les enjeux de l'enseignement de la proportionnalité ?* Faire émerger les représentations des enseignants sur les enjeux et les fonctions de la proportionnalité et donc l'intérêt de son enseignement. Poser les bases d'une bonne compréhension de ce dont il s'agit quand on parle de proportionnalité. Appréhender les problématiques de l'enseignement de la proportionnalité. Mettre en exergue les enjeux de l'enseignement de la proportionnalité.	40 min
2	*Quelles procédures de proportionnalité enseigner ?* Développer les gestes professionnels liés à l'enseignement de la proportionnalité. Mettre en exergue la nécessité de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir.	45 min
3	*Pourquoi changer de procédure ?* Développer les gestes professionnels liés à l'interrogation des énoncés au regard des variables didactiques des situations. Mettre en lumière comment le choix des nombres en jeu dans un problème relevant de la proportionnalité va influer sur les procédures utilisées pour le résoudre.	20 min
4	*Vers un outil d'observation des acquis des élèves* Appréhender l'outil d'observation des acquis des élèves en vue d'une mise en œuvre en classe.	30 min
5	*Proposition de travaux à mener à distance*	2x2h15
6	*Approfondissement autour des mises en œuvre en classe* Poursuivre le développement des gestes professionnels des enseignants sur la base des mises en œuvres en classe et des analyses transmises.	45 min
7	*Quels supports d'activités choisir pour conduire une séance ?* Amener les enseignants à se questionner sur différents supports d'activités et sur leur intérêt.	60 min
8	*Quelle progressivité dans les procédures attendues ?* Amener les enseignants à déterminer des repères de progressivité dans les procédures attendues au cycle 3.	30 min
	Récapitulatif des points de vigilance mis en exergue dans les ressources	
	Bibliographie du dossier de formation	

Ressource 1 - Quels sont les enjeux de l'enseignement de la proportionnalité ?

Phase 1 – Émergence des représentations des enseignants

Intention :
Faire émerger les représentations des enseignants sur les enjeux et les fonctions de la proportionnalité et donc l'intérêt de son enseignement.

Supports :
Des images de BD *Le Chat* de Philippe Geluck vidéoprojetées.
Des post-it.



Question :
« En quoi ces images de la célèbre BD de Philippe Geluck illustrent la question des enjeux de l'enseignement de la proportionnalité à l'école ? »
Chaque participant complète deux post-it minimum.

Synthèse des post-it / Échanges

Phase 2 – Mise en situation

Intentions :
Poser les bases d'une bonne compréhension de ce dont il s'agit quand on parle de proportionnalité.
Appréhender les problématiques de l'enseignement de la proportionnalité.

Support :
Document « La proportionnalité (connaissances pour les enseignants et différentes procédures – extraits Eduscol) ».

Consigne :
« Sachant que 4 stylos valent 2,42 €, combien valent 14 stylos ? »

Procédures possibles mises en œuvre :

- Utilisation des propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre :
  4 stylos valent 2,42 €, alors 2 stylos valent 1,21 €
  - 14 = 7 × 2 donc 14 stylos valent 7 × 1,21 € = 8,47 €.
  - 14 = 4 + 4 + 4 + 2 donc 14 stylos valent : 3 × 2,42 € + 1,21 € = 8,47 €.
- Passage par l'unité (procédure parfois appelée règle de trois « nouvelle ») :
  4 stylos valent 2,42 €, alors 1 stylo vaut 0,605 € et 14 stylos valent 14 × 0,605 € = 8,47 €
  Remarque : Dans le passage par l'unité, on commence par la division pour obtenir la valeur de 1.
- Règle de trois « ancienne » :
  4 stylos valent 2,42 €
  alors 1 stylo vaut quatre fois moins, soit $\frac{2{,}42}{4}$ €
  donc 14 stylos valent 14 fois plus soit $\frac{2{,}42}{4} € \times 14 = \frac{2{,}42 \times 14}{4} € = 8{,}47$ €
  Remarque : Dans la « règle de trois » enseignée dans les années 1960, on ne donne pas le résultat de la division, on travaille avec des fractions et on commence par la multiplication.
- Utilisation du coefficient de proportionnalité :

  a

Nombre de stylos	4	14
Prix à payer	2,42	?

  Il faut résoudre 4 × a = 2,42 pour trouver le coefficient de proportionnalité : a = 0,605.
  Le prix à payer est : 14 × 0,605 € = 8,47 €.
- Utilisation du produit en croix :

Nombre de stylos	4	14
Prix à payer	2,42	8,47

  $\frac{14 \times 2{,}42}{4} = 8{,}47$. Le prix à payer est 8,47 €.

→ Ce problème est révélateur des problématiques de la proportionnalité à l'école :
« Si l'on veut que les élèves progressent dans la résolution de problèmes de proportionnalité, on peut penser à institutionnaliser des techniques. Mais, l'efficacité et la pertinence d'une technique dans le champ des problèmes de proportionnalité dépendent de nombreuses variables.
L'institutionnalisation précoce de techniques n'apparait donc pas raisonnable dans la mesure où l'on veut que les élèves emploient des raisonnements de proportionnalité et développent des procédures appropriées.
La seule technique qui pourrait apparaitre « efficace », est le produit en croix, mais c'est un « truc » et il tue tout raisonnement de proportionnalité, ce qu'il est souhaitable de développer par ailleurs si l'on veut que la notion prenne sens » (HERSANT, 2005, *La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui*, Repères IREM, p.25).

Point de vigilance :
Pas de tableaux avant d'avoir installé des raisonnements oralisés stables *(si j'ai deux fois plus de…).*

Phase 3 – Synthèse collective des enjeux de l'enseignement de la proportionnalité

Intention :
Mettre en exergue les enjeux de l'enseignement de la proportionnalité.

La fonction sociale de la proportionnalité

- Nécessité de connaitre des stratégies pour effectuer les calculs du Chat.
- Usage de la proportionnalité dans la vie courante.
- Place de la proportionnalité dans la réalisation de l'objectif de l'école primaire « outiller le futur citoyen » pour faire face à des situations plus ou moins inédites, prendre des initiatives, etc.

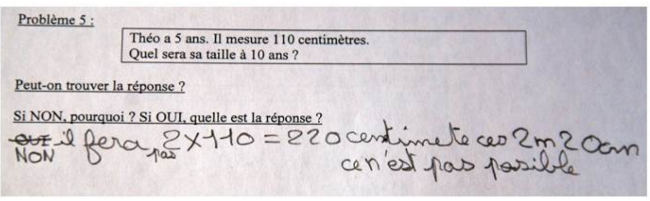
La fonction pédagogique de la proportionnalité

- Notion autour de laquelle peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques
- Beaucoup de notions autour de la proportionnalité : multiplications et divisions, changements d'unités, taux de pourcentages, vitesse constante, échelles, proportionnalité en géométrie.
- Usage de la proportionnalité dans diverses disciplines (géographie, EPS, sciences et technologie, etc.).
- Dans le prolongement des situations de proportionnalité rencontrées dès le cycle 2 dans le cadre de la résolution de problèmes multiplicatifs.
- Au cœur des trois domaines des mathématiques : « Nombres et calculs », « Grandeurs et mesures » et « Espace et géométrie ».
- Lien avec les 6 compétences : Chercher (tester, essayer plusieurs pistes de résolution), Représenter (se questionner sur le caractère proportionnel d'une situation représentée graphiquement), Raisonner (étapes de résolution : compréhension de l'énoncé, identification d'une situation de proportionnalité, recherche, production et rédaction d'une solution), Calculer (variation des modalités de calcul mises en œuvre), Communiquer (explicitation : réel travail de communication tant à l'oral qu'à l'écrit), notamment Modéliser :
    - utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne
    - reconnaitre et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité
    - reconnaitre des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie)
    - utiliser des propriétés géométriques pour reconnaitre des objets.

    → La proportionnalité est une modélisation du réel.
    Elle modélise une contrainte physique, logique ou sociale entre deux grandeurs.

→ Reconnaissance d'une situation de proportionnalité :

- Reconnaitre une situation de proportionnalité et le justifier est déjà tout un problème…
- La reconnaissance d'une situation de proportionnalité n'est pas préalable à sa résolution : elle intervient au cours même de son traitement, c'est en résolvant la situation qu'on va la caractériser.
  Le recours à une expérience effective peut être un moyen de vérifier la relation de proportionnalité entre les grandeurs en jeu.
- Justifier qu'une situation n'est pas de proportionnalité s'avère plus facile : une situation qui n'est pas modélisable avec la proportionnalité devrait être justifiée en insistant sur l'oral - Raisonnement par l'absurde se référant aux propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre.


Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

~~OUI~~ NON il fera pas 2x110 = 220 centimètres ces 2m20cm
ce n'est pas possible

Si cette situation était « de proportionnalité », quelle serait la taille de Théo à 40 ans ? À 1 an ?

- On reconnait des situations de proportionnalité par confrontation à des situations de non-proportionnalité.

→ **Difficulté du rapport entre réalité et modèle : les implicites des situations dites « concrètes »**
Exemples autour de la mise en situation « Sachant que 4 stylos valent 2,42 €, combien valent 14 stylos ? » :

- les stylos sont tous les mêmes
- ils sont tous vendus au même prix
- on ne les achète pas par lot
- on ne peut pas avoir de réduction…

Dans les énoncés d'exercices de proportionnalité des manuels d'école élémentaire ou de collège, le modèle proportionnel est rarement exprimé de façon explicite dans l'énoncé. L'élève doit alors utiliser son expérience personnelle ou la fréquentation des problèmes de proportionnalité. Dans la mise en situation, la proportionnalité relève d'un « savoir social » mais n'est pas explicitée : dans une librairie, les stylos ont vendus à l'unité et tous au même prix. Cet argument justifie le modèle proportionnel mais n'est pas exprimé dans l'énoncé.

→ Une attention particulière est à porter aux implicites des situations dites « concrètes ».

Point de vigilance : Lister les implicites, en lever certains et en laisser d'autres (tout l'art du professeur !).

Pour essayer de lever certains implicites :

- On peut recourir à certains mots-clés, qui renferment l'idée de proportionnalité : dans le problème des stylos de la mise en situation, le mot-clé « identiques » pourrait impliquer l'aspect proportionnel et pourrait sous-entendre qu'ils sont vendus à l'unité, tous au même prix.
- La donnée de deux couples de nombres (ou plus) en relation permet d'inférer la relation de proportionnalité. L'intervention d'un troisième couple de données consiste donc une aide à la modélisation. Exemple : « Sachant que 4 stylos valent 2,42 € et que 6 stylos valent 3,63 €, combien valent 14 stylos ? ». Cela permet à l'élève de repérer des régularités, de tester des hypothèses de modèle (et de multiplier les procédures !).

Remarque concernant la recette de cuisine :

- Le contexte d'une recette de cuisine est reconnu socialement comme un cadre de proportionnalité
- Dans la pratique, tout cuisinier sort du cadre de la proportionnalité : adaptation de sa recette, notamment en fonction de l'appétit des convives
- Le choix de la situation : entre cadre idéal et cadre réel – attention à la réalité de la situation - exemple de la recette de pâte à crêpes (www.marmiton.org) Recette pour 10 personnes ? (Apparition de 4/3 d'œufs…)

→ Il s'agit de **s'adapter face à un problème** pour mobiliser une procédure permettant de le résoudre.
Il s'agit d'une mobilisation qui dépend de la disponibilité des connaissances numériques de chacun, notamment en calcul mental.

→ **Amener les élèves à pratiquer et maitriser plusieurs procédures**, passer de l'une à l'autre en fonction des situations, donc à **faire le bon choix stratégique.**
→ **Nécessité de percevoir les relations** qui existent entre les nombres donc de savoir faire « parler les nombres » (composition-décomposition), de disposer de faits numériques et de procédures de calcul mental.

D'où le questionnement suivant au cœur de ce parcours de formation :

Comment faire de la proportionnalité de façon efficace ?

DOCUMENT POUR LES ENSEIGNANTS – *La proportionnalité*
Connaissances mathématiques non enseignées aux élèves mais nécessaires aux PE pour enseigner
Différentes procédures à faire travailler par les élèves au cycle 3 (Extraits Ressource Eduscol)

Définitions de la proportionnalité

Définition en termes de grandeurs (mesurables) / en termes algébriques.

- Définition 1 : théorie des proportions
  Une suite $(x_1, x_2,..., x_n)$ est proportionnelle à une suite $(y_1, y_2,..., y_n)$ si les rapports x_1/y_1, x_2/y_2 ... sont égaux (les proportions sont conservées).
- Définition 2 : fonctions linéaires
  Il existe une fonction linéaire F : $x \rightarrow a \times x$ qui résume la situation.

Propriété de linéarité pour l'addition

- Définition 1 :
  Si les deux suites $(x_1, x_2,..., x_n)$ et $(y_1, y_2,..., y_n)$ sont proportionnelles, alors $(x_1 + x_2)$ correspond à $(y_1 + y_2)$
- Définition 2 :
  Si F est une fonction linéaire, alors : $F(x_1 + x_2) = (y_1 + y_2)$

Exemple : Sachant que 4 stylos valent 2,42 € et que 10 stylos valent 6,05 €, combien valent 14 stylos ?
(4 stylos + 10 stylos) donc 2,42 € + 6,05 € = 8,47 €.

Domaine « Nombres et calculs »
8 fois 10 est égal à 80 et 8 fois 3 est égal à 24.
Comme 13 est égal à 10 plus 3, on en déduit que 8 fois 13 est égal à 80 plus 24.

Domaine « Grandeurs et mesures »
5 kg de pommes de terre coûtent 6,40 € et 3 kg coûtent 3,84 €.
Comme 5 kg moins 3 kg font 2 kg, on en déduit que 2 kg de ces pommes de terre coûtent 6,40 € moins 3,84 € soit 2,56 €.

Domaine « Espace et géométrie »
La figure ABCD est telle que ACD est un triangle isocèle en A. On donne les dimensions suivantes DA = 18,2 cm, DC = 5,6 cm, AB = 11,9 cm et BC = 6,3 cm.
Sans utiliser de multiplication, indiquer les dimensions de l'agrandissement A'B'C'D' de cette figure telle que A'B' = 15,3 cm et B'C' = 8,1 cm.
Comme DC = 5,6 cm = 11,9 cm – 6,3 cm, on en déduit D'C' = 15,3 cm – 8,1 cm = 7,2 cm.
Comme DA = 18,2 cm = 11,9 cm + 6,3 cm, on en déduit D'A' = 15,3 cm + 8,1 cm = 23,4 cm.

Ressource Eduscol *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3* (p. 3)

Propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre

- Définition 1 :
  Si les deux suites $(x_1, x_2,..., x_n)$ et $(y_1, y_2,..., y_n)$ sont proportionnelles, alors $(k \times x_1)$ correspond à $(k \times y_1)$
- Définition 2 :
  Si F est une fonction linéaire, alors : $F(k \times x_1) = k \times F(x_1)$

Exemple : Sachant que 4 stylos valent 2,42 €, combien valent 8 stylos ?
(4 stylos x 2) donc 2,42 € x 2 = 4,84 €.

Domaine « Nombres et calculs »
7 fois 13 est égal à 91.
Comme 35 est le quintuple de 7, on a 35 fois 13 est le quintuple de 91 c'est-à-dire 455.

Domaine « Grandeurs et mesures »
Une pile de 500 feuilles de papier identiques a une épaisseur de 3,5 cm. Quelle est l'épaisseur d'une pile de 2 000 de ces mêmes feuilles ?
J'ai acheté 35 mangas qui étaient tous au même prix à la librairie et cela m'a coûté 252 €.
Si ma sœur veut en acheter 5, combien va-t-elle payer ?

Domaine « Espace et géométrie »
Dans un agrandissement ou une réduction, les longueurs sur la figure agrandie ou réduite sont proportionnelles aux longueurs associées sur la figure initiale. Les situations d'agrandissement ou de réduction sont particulièrement riches et propices à la mise en place d'activités à prise d'initiatives.

Ressource Eduscol *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3* (p. 3)

→ Les procédures utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre sont à privilégier au début du cycle 3 et ne doivent pas être abandonnées par la suite !

Passage par l'unité

Exemple : 4 stylos valent 2,42 €, alors 1 stylo vaut 0,605 € et 14 stylos valent 14 × 0,605 € = 8,47 €

À la garderie, il faut prévoir 80 centilitres de lait pour 5 enfants.
Combien faut-il prévoir de centilitres pour 3 enfants ?
Pour 5 enfants, il faut 80 centilitres de lait.
1 enfant, c'est 5 fois moins que 5 enfants. 5 fois moins que 80 centilitres c'est 16 centilitres.
Pour 1 enfant, il faut 16 centilitres de lait.
3 enfants, c'est 3 fois plus que 1 enfant. 3 fois plus que 16 centilitres c'est 48 centilitres.
Pour 3 enfants, il faut 48 centilitres de lait.

Ressource Eduscol *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3* (p. 3)

Règle de trois « ancienne »

Exemple : 4 stylos valent 2,42 €

alors 1 stylo vaut quatre fois moins, soit $\frac{2{,}42}{4}$ €

donc 14 stylos valent 14 fois plus soit $\frac{2{,}42}{4} € \times 14 = \frac{2{,}42 \times 14}{4} € = 8{,}47\ €$

Coefficient de proportionnalité

Exemple :

a

Nombre de stylos	4	14
Prix à payer	2,42	?

Il faut résoudre 4 × a = 2,42 pour trouver le coefficient de proportionnalité : a = 0,605.
Le prix à payer est : 14 × 0,605 € = 8,47 €.

Si 30 kg de café coûtent 600 €. Combien coûtent 13 kg de café ?
600 c'est 30 multiplié par 20, il faut multiplier le nombre de kilogrammes de café par 20 pour en trouver le prix en euros.
13 × 20 = 260
Le prix de 13 kg de café est 260 €.
On note ici l'utilisation d'une grandeur quotient (le coefficient de proportionnalité) : 20 €/kg.

Ressource Eduscol *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3* (p. 3)

Produit en croix

Exemple :

Nombre de stylos	4	14
Prix à payer	2,42	8,47

$\frac{14 \times 2{,}42}{4} = 8{,}47.$

Le prix à payer est 8,47 €.

DOCUMENT POUR LES FORMATEURS – *Compléments concernant la proportionnalité*

Concernant les deux approches théoriques de la proportionnalité

Lien entre les deux approches « théorie des proportions » et « fonctions linéaires » :

- Soit une situation de proportionnalité décrite par la théorie des proportions : le rapport commun, coefficient de proportionnalité a, permet de définir une fonction linéaire F : $x \rightarrow a \times x$ qui résume la situation : les couples de données de la situation correspondent à des couples (antécédents, images) de la fonction linéaire.
- Réciproquement, soit une fonction linéaire donnée : les couples de valeurs de cette fonction linéaire permet la construction de deux suites proportionnelles.

Remarques - extraits de l'article *Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique* d'Arnaud SIMARD (2012, Petit x 89, p. 51-62) :

- « Le cadre arithmétique (lié à la théorie des proportions) semble plus naturel pour introduire les situations de proportionnalité tandis que le cadre algébrique (fonctions linéaire) semble plus adapté pour parler du modèle proportionnel dans toute sa généralité » (p. 52).
- « Les deux modèles « théorie des proportions » et « linéarité » modélisent les mêmes situations, la seule différence réside dans le champ d'action de ces théories. La théorie des proportions est adaptée au cadre discret (seulement une famille finie de valeurs) alors que la linéarité prolonge la théorie des proportions au cadre continu (fonction de la variable réelle) » (p. 53).

Concernant la proportionnalité dans les programmes de l'école

Évolution historique :

L'étude de la proportionnalité, dont le terme n'est apparu dans les programmes de l'école primaire qu'en 1970, s'effectue aujourd'hui selon le modèle des fonctions linéaires. Auparavant, il s'agissait de l'étude des problèmes de règle de trois et de la théorie des proportions.
Pour une analyse de l'étude des programmes concernant la proportionnalité depuis 1887 : *La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui* de Magali HERSANT (2005, Repères IREM, p. 1-40).

Modèles théoriques et enseignement :

Les deux modèles théoriques de la proportionnalité (théorie des proportions et fonctions linéaires) ne sont pas enseignés pour eux-mêmes à l'école élémentaire (ni même au début du collège). En effet, d'une part, les rapports égaux prennent du sens lorsque la notion de rapport comme division a un sens, c'est-à-dire en classes de 6^{e} et de 5^{e} ; d'autre part, les fonctions linéaires sont enseignées à la fin du cycle 4, en classe de 3^{e}.
Toutefois, les propriétés caractéristiques des fonctions linéaires sont utilisées dans les procédures de résolution de problème relevant de la proportionnalité de façon implicite dès le cycle 3.

Concernant la règle de trois

L'expression est réapparue dans les programmes 2008 et n'apparait plus dans les programmes 2016, ni dans les ressources Eduscol 2016.
Toutefois, cette réapparition en 2008 a beaucoup interrogé les enseignants à ce moment-là et il peut être utile de revenir sur sa définition avec les enseignants en formation afin d'éviter des utilisations erronées.

D'après l'article *La règle de trois*, de Claudie ASSELAIN-MISSENARD et Henry PLANE (2009, Revue PLOT n°26, APMEP, 2^{e} trimestre, p. 19-21) :

- « Une première acception est une acception très générale. On appelle « règle de trois » tout problème de proportionnalité, proportionnalité inverse comprise. Et le terme « règle de trois » n'est pas attaché à une méthode précise ».

> **§ 2. — Règles de trois.**
>
> 788. — **Définitions.** — Une *règle de trois* est un problème dans lequel il s'agit d'une grandeur qui est directement ou inversement proportionnelle à plusieurs autres. On connaît la valeur de cette grandeur qui correspond à des valeurs données de celles dont elle dépend, et il s'agit de calculer une seconde valeur de cette même grandeur, correspondant à d'autres valeurs données de celles dont elle dépend.
>
> *Cours abrégé d'arithmétique de Carlo Bourlet Hachette 1910*

- « Une deuxième acception, un peu plus étroite, est de dénommer « règle de trois » tout problème de recherche de quatrième proportionnelle résolu par une méthode se rattachant peu ou prou aux « produits en croix ».

> **De la Règle de trois droite, simple.**
>
> 177. LA règle de trois est une opération par laquelle on cherche le terme inconnu d'une proportion.
>
> Quand une question exige une règle de trois, elle renferme quatre termes, dont trois sont connus. Deux de ces quatre termes sont causes des deux autres qui en sont les effets.
>
> On regarde comme première cause celle dont l'effet est connu, et réciproquement.
>
> La règle est droite quand les causes se contiennent dans le même ordre que les effets.
>
> *F P. Silvestre, 1787/1818*

- « la troisième acception associe l'expression « règle de trois » à la recherche de quatrième proportionnelle exclusivement par la méthode du retour à l'unité. »

François DROUIN, dans son article *Le retour de la « Règle de trois »…* (2009, Bulletin de l'APMEP 484, septembre-octobre, p. 577-583), donne un éclairage intéressant relatif à l'enseignement de la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité dans les années 60. En effet, cette dernière « ne se faisait pas à l'aide de tableaux, mais en écrivant en lignes les calculs à effectuer », et ce sans effectuer le calcul de la deuxième ligne.

Concernant la règle de trois et le coefficient de proportionnalité

Soit une situation de proportionnalité associée à une fonction linéaire $F(X) = aX$.
La règle de trois (passage à l'unité ou ancienne) revient à chercher $F(1)$.
Or $F(1) = F(X_1/X_1) = F(X_1)/X_1 = Y_1/X_1 = a$.
La valeur de $F(1)$ est la valeur du coefficient de proportionnalité. Donc le passage à l'unité revient à calculer le coefficient de proportionnalité sans le dire.
La différence réside dans les unités : $F(1)$ est en € alors que le coefficient de proportionnalité s'exprime en €/stylos.

DOCUMENT POUR LES FORMATEURS – *Autour de la proportionnalité*

Extraits du diaporama de la conférence d'Arnaud SIMARD – 26 septembre 2017 - Poitiers

II - Autour de la proportionnalité

1- Multiplications et divisions

- La multiplication

Exemple 7 x 15

Nombre de parts	1	7
valeur	15	?

« Un paquet contient 15 bonbons, combien de bonbons dans 7 paquets? »

1- Multiplications et divisions

- Les divisions

Exemple 15 : 9

Nombre de parts	1	9
valeur	?	15

(division – partition : recherche de la valeur d'une part)

« 9 tartelettes valent 15 euros, combien vaut une tartelette? »

1- Multiplications et divisions

- Les divisions

Exemple 15 : 9

Nombre de parts	?	1
valeur	15	9

(division – quotition : recherche du nombre de parts)

« 1 kg de figues vaut 9 euros, quelle masse de figues pour 15 euros ? »

1- Multiplications et divisions

Les divisions (partition et quotition) dépendent du contexte de l'exercice proposé.

Les divisions partition sont généralement mieux réussies que les divisions quotition.

Une explication :

Dans la division partition on cherche une grandeur quotient généralement identifiable (ex : on divise « des € par des tartelettes » pour trouver des €/tartelette)…alors que dans la division quotition l'équation aux unités est complexe (ex : on divise des € par des €/kg pour trouver des kg) ce qui est plus difficile à exprimer.

2- Les changements d'unités

Attention : cm², dm², m²…cL, dL, L… relève plus de la numération décimale que de la proportionnalité (le coefficient de proportionnalité est 10, 100, 1000…) → lien avec les fractions décimales

Changements d'unités :
- le change de monnaies (euro / dollars…)
- le changement d'unités de mesures internationales

3- Taux de pourcentages

Un pourcentage est l'expression d'une proportion pour cent unités.

Système efficace pour comparer des proportions :

Dans la classe de Lisette il y a 27 élèves dont 13 filles.
Dans celle d'Alban il y a 24 élèves dont 12 filles.

Dans quelle classe y a-t-il le plus de filles?
(additif : 13>12)

Dans quelle classe les filles sont-elles le plus représentées ?
(multiplicatif : 48% contre 50%)


Savoir-faire
J'apprends à…
Appliquer un taux de pourcentage
ÉNONCÉ Un centre d'équitation compte 250 licenciés. Il est composé de 82,4 % de femmes.
1) Quel est le pourcentage d'hommes licenciés de ce centre ?
2) Calculer le nombre de licenciés hommes dans ce centre.

Phare, cycle 3

Pour 100 licenciés, il y a « 82,4 femmes ».
Pour 50 licenciés, il y a « 41,2 femmes ».
Pour 250 licenciés, il y a 82,4 + 82,4 + 41,2 = 206 femmes.

Spécificité :
1- Attention au sens (82,4 femmes…?)
2- Symbole %
3- Ecritures différentes ($\frac{82,4}{100}$; 82,4%, 0,84)
4- Modèle additif et multiplicatif en interaction

4- Vitesse constante

$$d = v \times t$$

dans cette expression, la vitesse « v » constante apparaît comme le coefficient de proportionnalité qui lie distance « d » et durée « t ».

Exemple : Un train roule à vitesse constante de 120km/h pendant 2h30, quelle distance a-t-il parcourue ?

120 km en une heure donc 60 km en une demi heure ainsi 120 + 120 + 60 = 300 km en deux heures et demie.

5- Les échelles

Il y a plusieurs types d'échelles sur les cartes et plans mais tous donnent une relation de proportionnalité entre les distances réelles et les distances représentées

$$\text{Echelle} = \frac{\text{Distance sur le plan}}{\text{Distance réelle}}$$

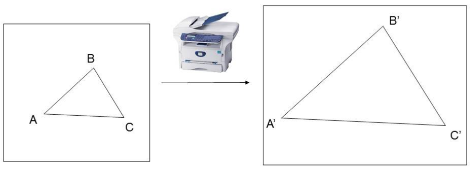
Les distances sont exprimées dans la même unité!

Exemple :
Une carte de randonnée IGN est à l'échelle $\frac{1}{25000}$. Cela signifie que 1 cm sur la carte correspond à 25000 cm dans la réalité.

Remarque :
Attention l'échelle « un dixième » considère la fraction décimale sous son aspect opérateur (et pas division partage ou division quotient).

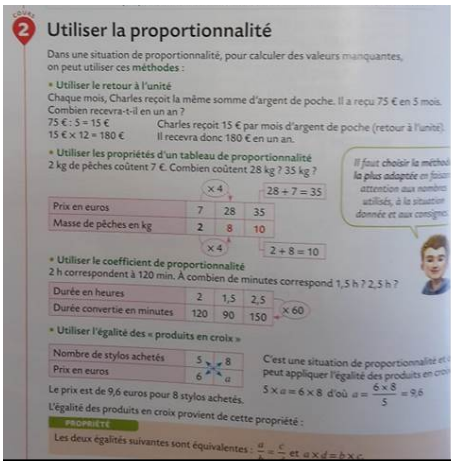
6- Proportionnalité en géométrie

Agrandissement – réduction



Il peut s'avérer intéressant d'avoir un aperçu du contenu des ouvrages utilisés par les étudiants se destinant au professorat des écoles à propos de la proportionnalité, à savoir les manuels de cycle 4.

Exemple : Manuel *Maths Monde cycle 4*, 2016, Éditions Didier.



2 Utiliser la proportionnalité

Dans une situation de proportionnalité, pour calculer des valeurs manquantes, on peut utiliser ces **méthodes** :

- **Utiliser le retour à l'unité**

Chaque mois, Charles reçoit la même somme d'argent de poche. Il a reçu 75 € en 5 mois. Combien recevra-t-il en un an ?

75 € : 5 = 15 € Charles reçoit 15 € par mois d'argent de poche (retour à l'unité).

15 € × 12 = 180 € Il recevra donc 180 € en un an.

- **Utiliser les propriétés d'un tableau de proportionnalité**

2 kg de pêches coûtent 7 €. Combien coûtent 28 kg ? 35 kg ?

Prix en euros	7	28	35
Masse de pêches en kg	2	8	10

× 4 ; 28 + 7 = 35 ; 2 + 8 = 10

- **Utiliser le coefficient de proportionnalité**

2 h correspondent à 120 min. À combien de minutes correspond 1,5 h ? 2,5 h ?

Durée en heures	2	1,5	2,5
Durée convertie en minutes	120	90	150

× 60

- **Utiliser l'égalité des « produits en croix »**

Nombre de stylos achetés	5	8
Prix en euros	6	a

C'est une situation de proportionnalité et [illegible] peut appliquer l'égalité des produits en croix

$5 \times a = 6 \times 8$ d'où $a = \frac{6 \times 8}{5} = 9{,}6$

Le prix est de 9,6 euros pour 8 stylos achetés.

L'égalité des produits en croix provient de cette propriété :

PROPRIÉTÉ

Les deux égalités suivantes sont équivalentes : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $a \times d = b \times c$

La page de manuel ci-contre est une page parmi tant d'autres dans les manuels de cycle 4 : des tableaux, des produits en croix, etc.

Indéniablement, un travail de déconstruction de la proportionnalité est à faire chez les enseignants.

Par ailleurs, Arnaud SIMARD (Conférence, 26 septembre 2017, Poitiers) affirme :

- « Le sens de la proportionnalité (liaison multiplicative entre des grandeurs) ne doit pas se perdre au profit d'une représentation (tableau) et d'une « technique » (calcul sur les lignes et les colonnes).
- Pour parler de proportionnalité avec des élèves (cycles 3 et 4), il est important de ne pas systématiser la représentation sous forme de tableau de nombres.
- Pour parler de proportionnalité avec des personnes initiées (enseignants, étudiants, …) et lorsque les implicites sont levés, nous pouvons nous permettre de résumer les situations sous forme de tableau (*« la rigueur n'a de sens que là où il y a ambiguïté »*) ».

Ressource 2 - Quelles procédures de proportionnalité enseigner ?

Intentions :
Développer les gestes professionnels liés à l'enseignement de la proportionnalité.
Mettre en exergue la nécessité de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir.

Support :
Document « Problème des citrons – Analyse de productions d'élèves de cycle 3 ».

Phase 1 – Analyse de productions d'élèves

Buts de l'activité :
- Identifier les différentes procédures pouvant être mises en œuvre par un élève de cycle 3 pour résoudre un problème de proportionnalité
- Se questionner sur la gestion des différentes procédures obtenues au cours la résolution du problème.

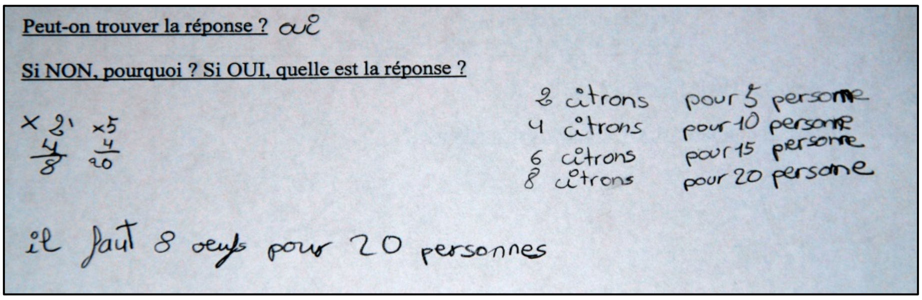
L'analyse de productions d'élèves est à concevoir comme un filtre d'analyse permettant de prendre en compte les réussites comme les erreurs des élèves.

Consignes :
1) Analyser les productions suivantes au regard des acquis et des erreurs des élèves.
2) Comment faire évoluer les procédures ?
3) Quelle synthèse dans la classe sur la base de ces productions d'élèves ?

Modalités de travail :
- Temps de recherche individuelle
- Travail en groupes de 3-4 enseignants : échanges autour des questions posées
- Mise en commun collective.

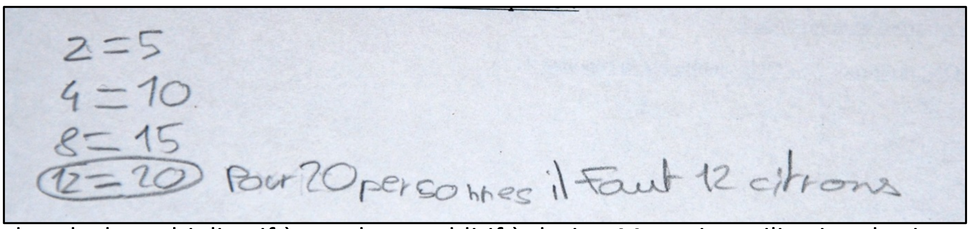
Problème : Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Production A


Peut-on trouver la réponse ? oui
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?
× 2 ×5
4/8 4/20
2 citrons pour 5 persone
4 citrons pour 10 persone
6 citrons pour 15 persone
8 citrons pour 20 persone
il faut 8 oeufs pour 20 personnes

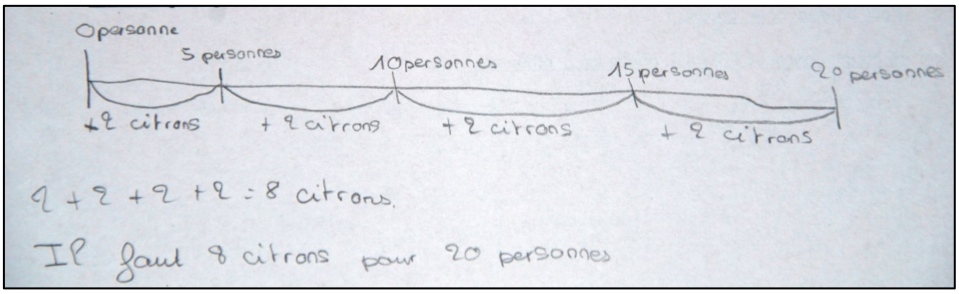
Procédure mixte : utilisation de la propriété de linéarité pour l'addition / pour la multiplication par un nombre.
Erreur dans la phrase réponse : « œufs » en lieu et place de « citrons ».

Production B


2=5
4=10
8=15
12=20 Pour 20 personnes il faut 12 citrons

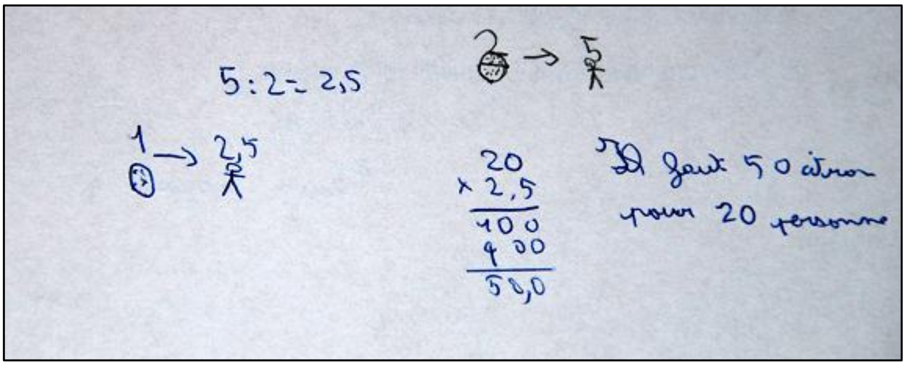
Erreur de calcul : multiplicatif à gauche et additif à droite. Mauvaise utilisation du signe « = » (cf. Synthèse)

Production C



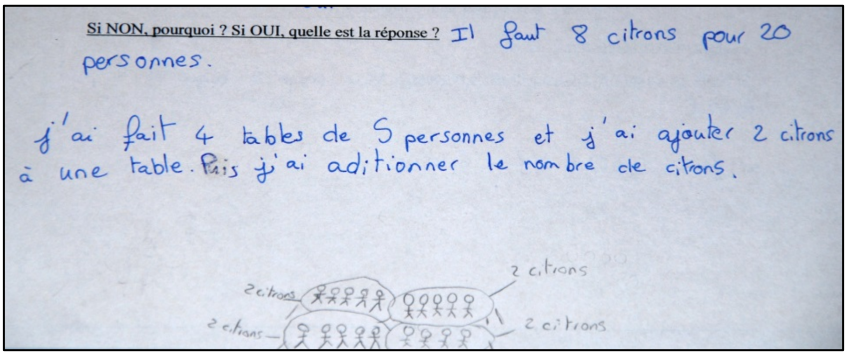
Procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition (schéma).

Production D



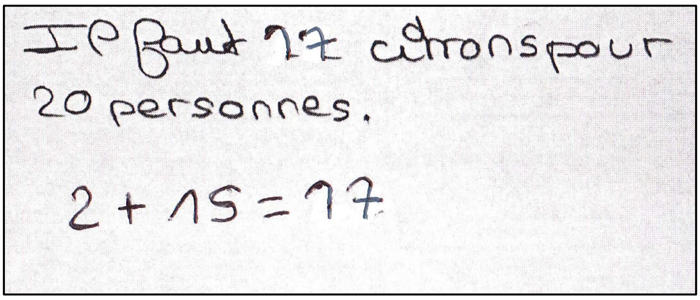
Raisonnement en deux temps : calcul du nombre de personnes par citron (résultat correct : 2,5 personnes par citron), puis multiplication erronée par le nombre de personnes (au lieu de diviser le nombre de personnes par 2,5 – ce qui est plus compliqué à comprendre). L'élève utilise une procédure trop complexe et perd le fil de son raisonnement.

Production E



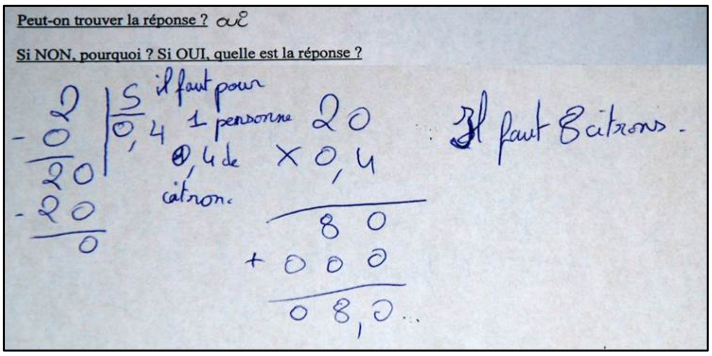
Procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition (dessin).

Production F



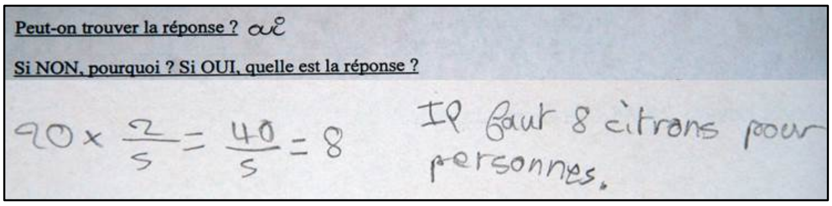
Erreur de la persistance du modèle additif :
Pour 15 personnes de plus, il faut 15 citrons de plus !
→ Vers l'introduction d'un troisième couple de données.

Production G



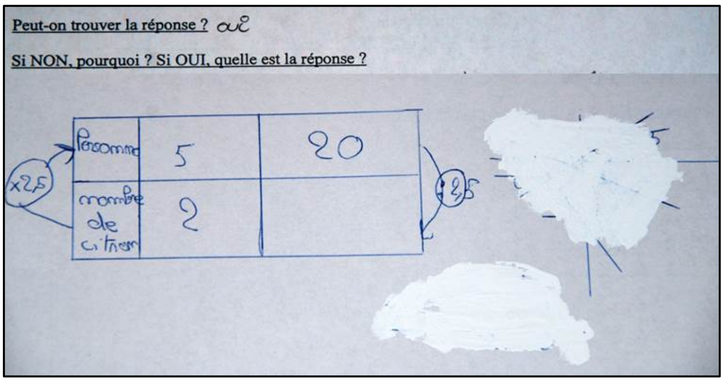
Procédure utilisant le passage par l'unité (passage par le nombre de citrons pour une personne).
→ Pas la procédure la plus efficace !...

Production H



Procédure : Règle de trois « ancienne » ? Utilisation du coefficient de proportionnalité ? Produit en croix ?
Remarque : Il peut être impossible pour l'enseignant de reconnaitre la stratégie utilisée par l'élève si la procédure est uniquement numérique.
→ Le passage à l'oral pour expliciter cette procédure est important.
Il s'agit de mettre des mots sur les actes et d'expliciter les données numériques manipulées avec des unités.

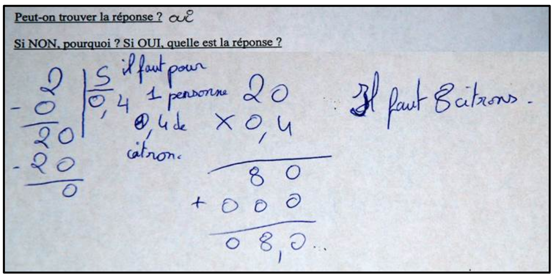
Production I

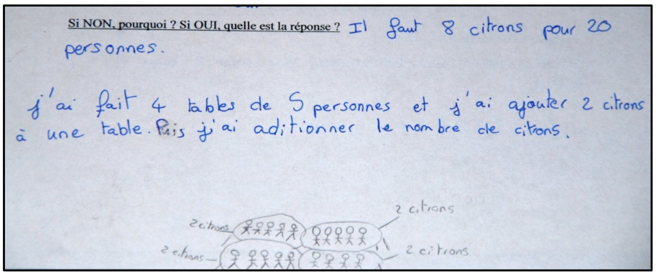


Erreur classique du choix de la procédure.
→ Attention à ne pas « formaliser » trop tôt !

Phase 2 – Synthèse collective

Procédure experte ou la plus adaptée ?





Ressource Eduscol *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3*
« L'objectif n'est pas, à ce stade, de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de **permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir** […] » (p. 1).

Lors des temps de mise en commun :
« La comparaison de différentes procédures doit permettre aux élèves d'acquérir ces différentes procédures et de prendre conscience qu'en fonction des nombres en jeu dans un problème, certaines sont plus efficaces que d'autres : demandant moins de calculs, ou faisant appel à des calculs plus simples, elles permettent de gagner en rapidité et de diminuer le risque d'erreurs » (p. 5).
→ **Insister sur l'oral : explicitation et confrontation.**

Ressource Eduscol *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3 – Activité : Mousse au chocolat*, p. 1
« On se gardera cependant de hiérarchiser ces méthodes, aucune n'étant plus « experte » que les autres ; l'élève doit apprendre à s'adapter face à un problème pour mobiliser une procédure lui permettant de le résoudre. […]
Pour un élève donné, l'efficacité d'une procédure pour résoudre un problème donné pourra évoluer, en fonction de ses connaissances, entre le début et la fin du cycle 3 » (p. 1).

Statut du signe « = » :
Production B : le signe « = » ne lie pas les nombres entre eux
Ressource Eduscol *Le calcul en ligne au cycle 3* – page 7
« Les étapes de calcul écrites par les élèves doivent être conçues comme un support à la pensée, comme des écrits transitoires qui peuvent ne pas respecter tous les codes de rédaction mathématique, en particulier en ce qui concerne l'utilisation du signe « = » et des parenthèses. Comme pour la production d'écrits, un seuil de tolérance doit être accordé à tous les élèves. Pour distinguer ces étapes de calcul des écrits institutionnels, le professeur pourra faire travailler les élèves sur un support dédié (cahier de recherche, feuilles de couleur,…). L'explicitation orale permettra ensuite aux élèves de montrer comment ils comprennent ces étapes écrites ; le professeur pourra alors, si cela se révèle être le moment opportun, aider les élèves à les faire évoluer pour qu'elles deviennent mathématiquement correctes, mais le respect en autonomie des codes par les élèves n'est pas un exigible du cycle 3. Il est cependant essentiel que ces étapes de calcul, lorsqu'elles sont écrites par le professeur dans les temps de travail collectif, de mise en commun ou de synthèse visant l'élaboration de la trace écrite institutionnelle, soient à la fois mathématiquement correctes et compréhensibles par les élèves. C'est cette trace écrite finale que l'on retrouvera dans les écrits de référence (cahiers de leçon ou affiches référentes de la classe) ».

Textes de savoir :
Importance des traces écrites individuelles et collectives - Affichage collectif - Cahier-mémoire.
Ressource Eduscol *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3 – Activité : Mousse au chocolat*, p. 1 :
« Les élèves devront connaitre l'existence des différentes méthodes permettant de résoudre un problème de proportionnalité. Ils auront dans leur cahier des exemples de traitement d'exercices génériques selon les différentes méthodes possibles ».
Exemple : Les procédures recourant aux propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples :

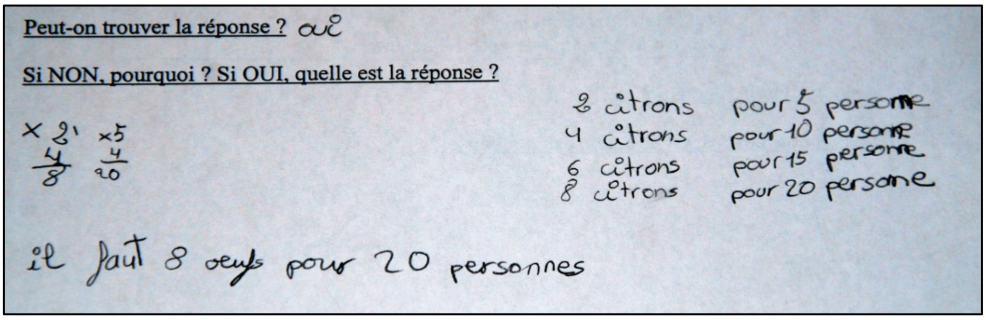
- « si j'ai deux fois, trois fois…. plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois …. plus d'ingrédients »
- « si 6 stylos valent 10 euros et 3 stylos valent 5 euros, alors 9 stylos valent 15 euros ».

DOCUMENT POUR LES ENSEIGNANTS – *Problème des citrons*
Analyse de productions d'élèves de cycle 3

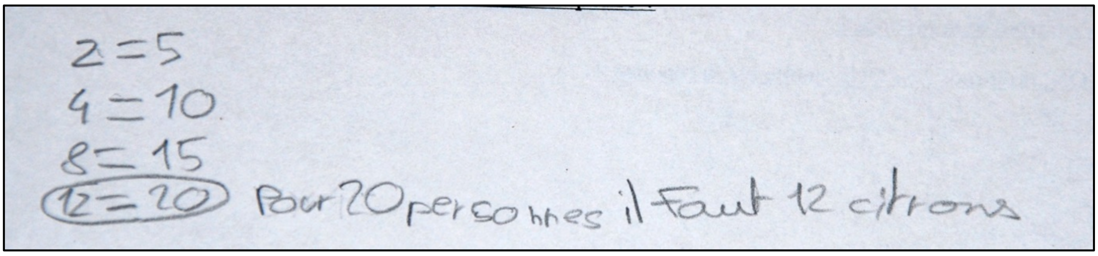
Problème :
Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

1) Analyser les productions suivantes au regard des acquis et des erreurs des élèves.
2) Comment faire évoluer les procédures ?
3) Quelle synthèse dans la classe sur la base de ces productions d'élèves ?

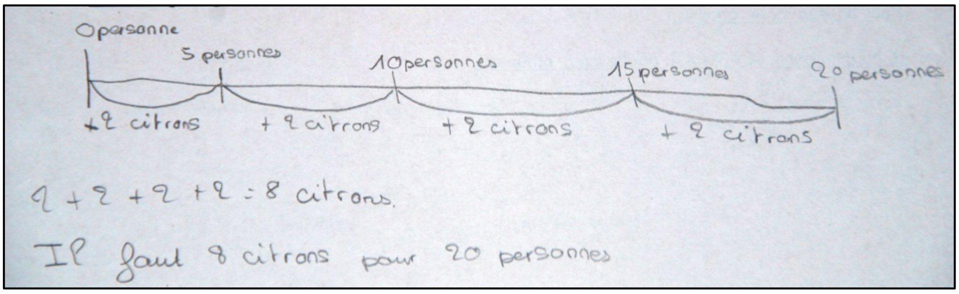
Production A



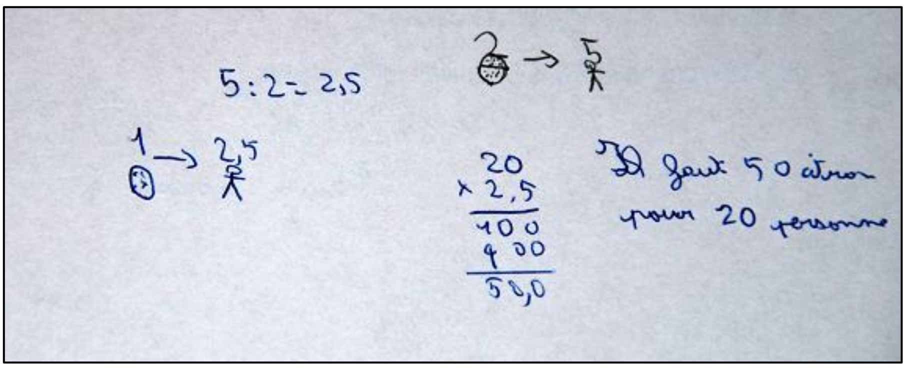
Production B



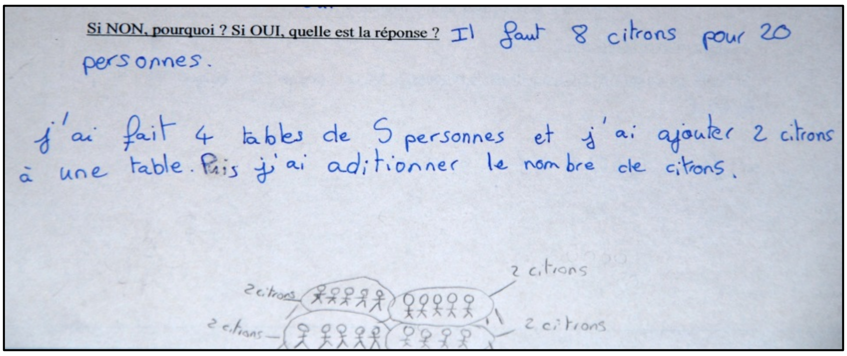
Production C



Production D



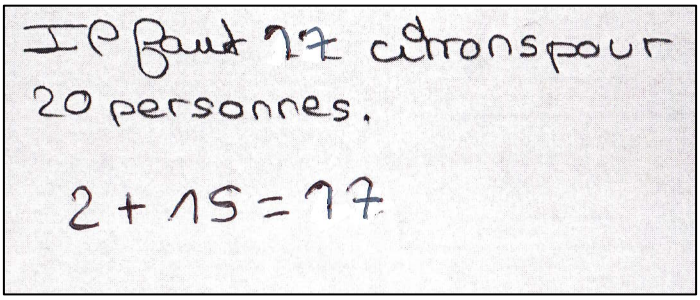
Production E



Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ? Il faut 8 citrons pour 20 personnes.

j'ai fait 4 tables de 5 personnes et j'ai ajouter 2 citrons à une table. Puis j'ai aditionner le nombre de citrons.

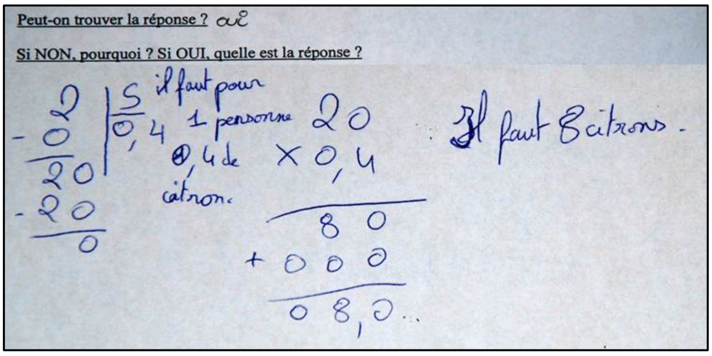
Production F



Il faut 17 citrons pour 20 personnes.

$2 + 15 = 17$

Production G



Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

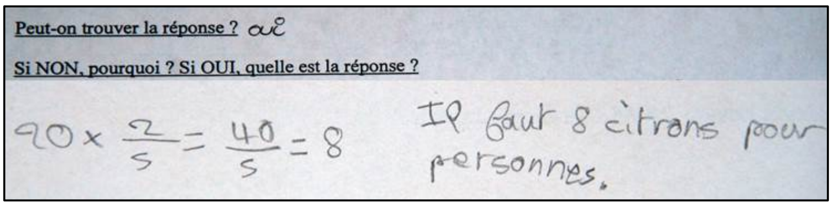
$$\begin{array}{r|l} 2 & 5 \\ -0 & 0,4 \\ 20 & \\ -20 & \\ 0 & \end{array}$$

il faut pour 1 personne 0,4 de citron.

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times\ 0,4 \\ \hline 80 \\ +\ 000 \\ \hline 08,0 \end{array}$$

Il faut 8 citrons.

Production H



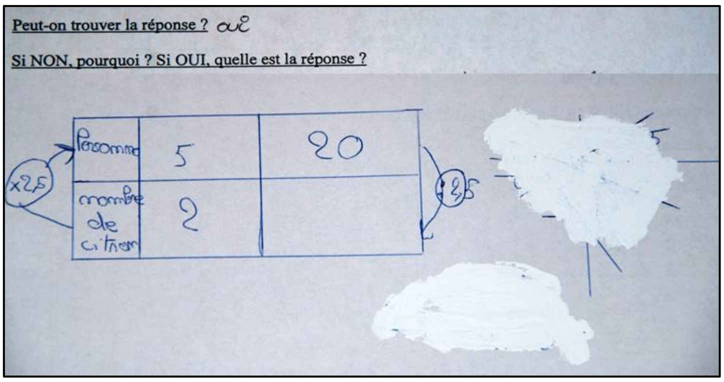
Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$20 \times \frac{2}{5} = \frac{40}{5} = 8$

Il faut 8 citrons pour personnes.

Production I



Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

Personne	5	20
nombre de citron	2	

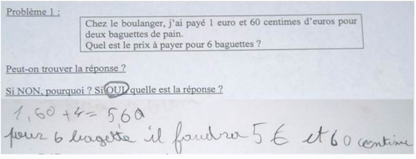
x2,5

x2,5

Extraits du diaporama de la conférence d'Arnaud SIMARD – 26 septembre 2017 - Poitiers

4- Erreurs classiques

Persistance du modèle additif

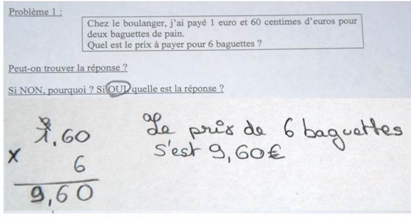


Pour 4 baguettes de PLUS on paye 4 euros de PLUS !

→ Introduction d'un troisième couple de données.

4- Erreurs classiques

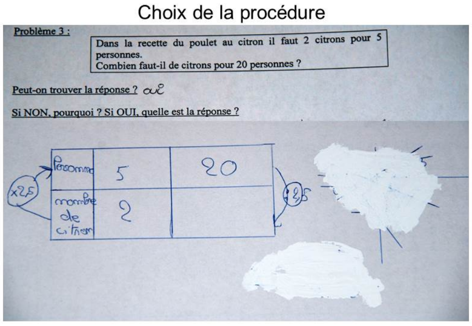
Non prise en compte du passage à l'unité



→ Dans l'énoncé : « deux baguettes » ou « 2 baguettes » ?

4- Erreurs classiques

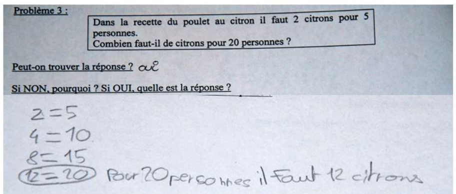
Choix de la procédure



Attention à ne pas « formaliser » trop tôt !

4- Erreurs classiques

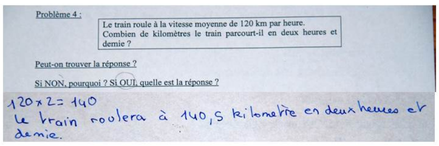
Mauvaise utilisation du signe « = »



→ Voir le document « calcul en ligne au cycle 3 » pour le statut du signe « = »

4- Erreurs classiques

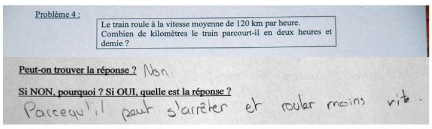
Difficulté à travailler avec les décimaux



→ L'élève se sécurise avec le modèle additif dès que la nature des nombres utilisés se complique ! L'oral doit permettre de prévenir ce genre d'erreur.

4- Erreurs classiques

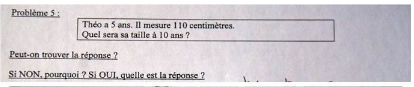
Confusion entre « vitesse instantanée » et « vitesse moyenne »



→ notion de vitesse « constante »

4- Erreurs classiques

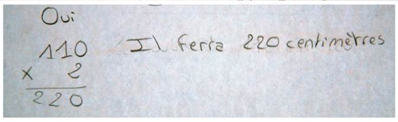
Effet de contrat : les énoncés typés « proportionnalité »


Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?


Oui

110 × 2 = 220

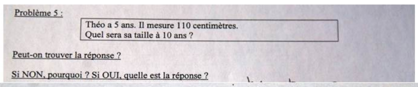
Il ferra 220 centimètres

→ Confronter proportionnalité, non proportionnalité et proportionnalité « partielle »

→ Attention à la structure des énoncés

4- Erreurs classiques

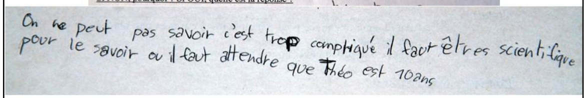
Enoncé « concret »…réponse « concrète »


Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

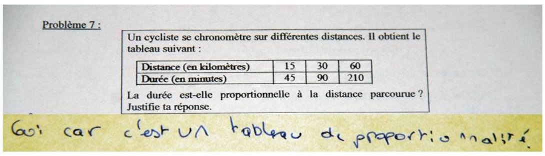
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?


On ne peut pas savoir c'est trop compliqué il faut êtres scientifique pour le savoir ou il faut attendre que Théo est 10ans

→ Argumentation qui sort du cadre mathématique souhaité (problème de la modélisation)

4- Erreurs classiques

Un tableau ne fait pas la proportionnalité.


Problème 7 :

Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

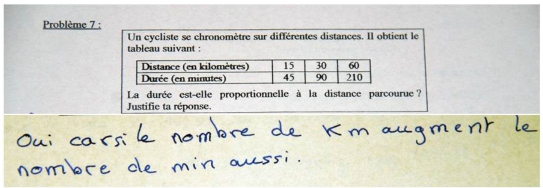
Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ? Justifie ta réponse.

Oui car c'est un tableau de proportionnalité.

4- Erreurs classiques

Confusion entre « croissance » et « proportionnalité ».


Problème 7 :

Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ? Justifie ta réponse.

Oui car si le nombre de Km augment le nombre de min aussi.

→ confrontation avec des cadres du type âge – taille

Ressource 3 – Pourquoi changer de procédure ?

Intentions :
Développer les gestes professionnels liés à l'interrogation des énoncés au regard des variables didactiques des situations.
Mettre en lumière comment le choix des nombres en jeu dans un problème relevant de la proportionnalité va influer sur les procédures utilisées pour le résoudre.

Phase 1 – Analyse d'énoncés autour d'un problème

But de l'activité :
Se questionner sur les énoncés donnés aux élèves en termes de caractéristiques des problèmes et en termes de procédures privilégiées.

Support :
Document « Problèmes autour de quatre bonbons » - 1 document par binôme.

Consigne :
1) Quelles sont les caractéristiques de chacun des quatre problèmes suivants ?
2) Quelle(s) procédure(s) chacun de ces problèmes privilégie-t-il ?

Modalités de travail :
Travail en binôme.

Mise en commun / échanges.

Problème	Caractéristiques du problème	Procédure(s) que privilégie le problème
Sachant que 4 bonbons valent 2 euros, combien valent 8 bonbons ?	Nombres entiers Rapport interne simple (x 2, double) Rapport externe simple (x 0,5)	Au choix
Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros, combien valent 8 bonbons ?	Présence de nombres décimaux Rapport interne simple (x 2, double) Rapport externe complexe (x 0,605)	Utilisation des propriétés de linéarité additive / multiplicative
Sachant que 4 bonbons valent 2 euros, combien valent 14 bonbons ?	Nombres entiers Rapport interne complexe (x 3,5) Rapport externe simple (x 0,5)	Utilisation du retour à l'unité Utilisation du coefficient de proportionnalité
Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros, combien valent 14 bonbons ?	Présence de nombres décimaux Rapport interne complexe (x 3,5) Rapport externe complexe (x 0,605)	Au choix (cf. mise en situation – Ressource 1 / « stylos »)

- Le **rapport interne** (ou scalaire) est le rapport de deux éléments d'une même grandeur
  - Si la situation est de proportionnalité, alors le rapport interne est conservé dans le passage d'un élément à un autre
- Le **rapport externe** (ou fonctionnel) est le rapport de deux éléments issus de deux grandeurs distinctes (coefficient de proportionnalité).

Phase 2 – Synthèse collective

Relations entre les nombres (rapports) et efficacité des procédures :

- Si le rapport interne est simple (cela peut être un rapport entier 2, 3, 10 etc., ou décimal 1,5), la procédure la plus efficace (et la plus naturelle) reposera sur l'utilisation des propriétés de linéarité pour l'addition et/ou pour la multiplication.
- Si le rapport externe est simple, la procédure la plus efficace (et la plus naturelle) reposera sur l'utilisation du retour à l'unité ou sur celle du coefficient de proportionnalité.
- Si aucun rapport n'est simple (rapport complexe, c'est-à-dire difficile à identifier par l'élève), alors l'élève devra faire un choix.
- Si les deux rapports sont simples, alors l'élève devra faire un choix.

Remarque : Le rapport externe n'est pas explicitable pour des élèves de CM quand ce rapport n'est pas entier.

Exemple : Dans le problème des citrons (Ressource 2) « Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ? »

- le rapport interne est simple : passage de 5 à 20 personnes (x 4 ou : 4)
- le rapport externe est complexe : 1 citron pour 2,5 personnes ou 2/5 de citron par personne (ce qui constitue un raisonnement plus difficile à contrôler).

L'utilisation des propriétés de linéarité semble donc privilégiée.

Variables didactiques :

Une variable didactique est une donnée du problème à résoudre que l'enseignant peut faire varier et dont la variation influe sur la procédure de résolution de l'élève.

Variables didactiques « numériques » décisives :

- Type de nombres mis en jeu : nombres entiers, nombres décimaux, nombres rationnels, nombres irrationnels
- Relation entre les nombres (variable didactique fondamentale) :
    - Rapport interne : entier / non entier, identifiable facilement / difficilement
    - Rapport externe : entier / non entier, identifiable facilement / difficilement

  → Cela nécessite de savoir faire « parler les nombres » (composition-décomposition).

Ressource Eduscol *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3* (p. 3) :
« En variant les nombres et les relations numériques, l'enseignant habitue l'élève à changer de procédure pour choisir de manière pertinente la plus efficace pour lui ».

Autres variables didactiques à mobiliser :

- Grandeurs en jeu : connaissance des grandeurs en jeu (ou méconnaissance), nombre de grandeurs en jeu, nature et unité (de même nature et de même unité, de même nature mais d'unités différentes, de nature différente).
- Intervention ou non d'un troisième couple de données (cf. Ressource 1) - Exemple : sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros et que 6 bonbons valent 3,63 euros, combien valent 14 bonbons ? → L'introduction d'un troisième couple de données permet à l'élève de repérer des régularités, de tester des hypothèses de modèle et de diversifier ses procédures.
- Utilisation de la calculatrice.

→ Les stratégies de résolution dépendent de la nature du rapport externe, de la nature du rapport interne et des répertoires de connaissances des élèves.
Réciproquement, les techniques résolutoires vont engendrer des connaissances qui vont enrichir ces répertoires.

Points de vigilance :
- Interroger les énoncés en se demandant quelles procédures ils privilégient.
- Varier le type d'énoncés : rapports internes (à une même grandeur) et rapports externes (entre deux grandeurs).

DOCUMENT POUR LES ENSEIGNANTS – *Problèmes autour de quatre bonbons*
Analyse d'énoncés

1) Quelles sont les caractéristiques de chacun des quatre problèmes suivants ?
2) Quelle(s) procédure(s) chacun de ces problèmes privilégie-t-il ?

Problème	Caractéristiques du problème	Procédure(s) que privilégie le problème
Problème A : Sachant que 4 bonbons valent 2 euros, combien valent 8 bonbons ?		
Problème B : Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros, combien valent 8 bonbons ?		
Problème C : Sachant que 4 bonbons valent 2 euros, combien valent 14 bonbons ?		
Problème D : Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros, combien valent 14 bonbons ?		

Ressource 4 - Vers un outil d'observation des acquis des élèves

Intention :
Appréhender l'outil d'observation des acquis des élèves en vue d'une mise en œuvre en classe.

Phase 1 – Analyse d'énoncés

Support :
« Fiches d'exercices CM1/CM2 ».

Consigne :
Analyser les énoncés proposés.

Groupe 1 : Exercices 1, 2 et 3
Groupe 2 : Exercices 4, 5 et 6
Groupe 3 : Exercices 7, 8 et 9

Modalités de travail :
- Temps de recherche individuelle
- Travail en groupes de 3-4 enseignants
- Mise en commun.

Phase 2 – Vers une mise en œuvre en classe ....

Supports :
« Fiches d'exercices CM1 ».
« Fiches d'exercices CM2 ».

Ne pas se noyer dans l'analyse préalable,
Mais prendre en compte les points de vigilance précédemment mis en exergue : implicites, procédure(s) privilégiée(s) par l'énoncé, nature des rapports interne et externe.

Rappel - Points de vigilance :
- Pas de tableaux avant d'avoir installé des raisonnements oralisés stables.
- Lister les implicites, en lever certains et en laisser d'autres.
- Interroger les énoncés en se demandant quelles procédures ils privilégient.
- Varier le type d'énoncés : rapports internes (à une même grandeur) et rapports externes (entre deux grandeurs).

→ Mise en œuvre en classe d'au moins une situation proposée avant la date 1.

DOCUMENT POUR LES ENSEIGNANTS – *Fiches d'exercices CM1/CM2*
Analyse d'énoncés

Groupe 1

1. Dans le livre de recettes de cuisine de Corentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

Pour 15 crêpes	Pour 25 crêpes
300 g de farine	500 g de farine
3 œufs	5 œufs
75 cL de lait	125 cL de lait
3 cuillères à soupe d'huile	5 cuillères à soupe d'huile

Mais Corentin veut faire 10 crêpes seulement.
Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes ?

2. Madame Lucas veut préparer 60 crêpes pour la fête d'anniversaire de sa fille. Elle a emprunté le livre de recette de Corentin.
Quelles sont les quantités d'ingrédients nécessaires pour faire 60 crêpes ?

3. Gabin et Jade s'ennuient à l'arrière de la voiture de leurs parents. Pour s'occuper, en attendant à un feu rouge, ils comptent le nombre de fois que s'allume le clignotant de la voiture devant eux.

- Gabin a compté qu'il s'allumait 35 fois en 25 secondes ;
- Jade a compté qu'il s'allumait 49 fois en 35 secondes.

Combien de fois va s'allumer ce clignotant en une minute ?
Et en 10 secondes ?

Groupe 2

4. Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boite une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant, pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g.
Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

5. L'usine produit également des boulons. Ceux-ci sont vendus dans des boites de 100. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boite est réglée sur 836 g.
Une autre machine fait des boites des mêmes boulons, mais de 25 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 25 boulons ?

6. Cette usine produit également des boulons d'une plus grande taille. Ceux-ci sont vendus dans des boites de 10. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boite est réglée sur 178 g.
Une autre machine fait des boites des mêmes boulons, mais de 3 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 3 boulons ?

Groupe 3

7. Plusieurs enfants jouent avec des Kapla, c'est un jeu de construction à base de planchettes en bois toutes identiques.
Arthur a empilé 50 planchettes et a ainsi obtenu une tour de 39 cm de hauteur.

- Zoé a empilé 100 planchettes ;
- Evan a empilé 5 planchettes ;
- Lilia a empilé 17 planchettes.

Quelle est la hauteur des tours construites par chaque enfant ?

8. Un train roule à la vitesse constante de 240 km/h.
Quelle distance parcourt-il en 15 minutes à cette vitesse ?
Combien de temps met-il pour parcourir 100 km à cette vitesse ?

9. Sur un plan de l'école de la Terrasse, l'échelle donnée dit que 10 cm sur le plan représentent 25 m en réalité.
Sur le plan, le couloir du deuxième étage de l'école mesure 13,6 cm.
Quelle est la longueur du couloir en réalité ?
Une salle de classe mesure 6 m de large. Quelle est la largeur de cette salle sur le plan ?

1. Dans le livre de recettes de cuisine de Corentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

Pour 15 crêpes	Pour 25 crêpes
300 g de farine	500 g de farine
3 œufs	5 œufs
75 cL de lait	125 cL de lait
3 cuillères à soupe d'huile	5 cuillères à soupe d'huile

Mais Corentin veut faire 10 crêpes seulement.
Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes ?

2. Madame Lucas veut préparer 60 crêpes pour la fête d'anniversaire de sa fille. Elle a emprunté le livre de recette de Corentin.
Quelles sont les quantités d'ingrédients nécessaires pour faire 60 crêpes ?

3. Gabin et Jade s'ennuient à l'arrière de la voiture de leurs parents. Pour s'occuper, en attendant à un feu rouge, ils comptent le nombre de fois que s'allume le clignotant de la voiture devant eux.

- Gabin a compté qu'il s'allumait 35 fois en 25 secondes ;
- Jade a compté qu'il s'allumait 49 fois en 35 secondes.

Combien de fois va s'allumer ce clignotant en une minute ?
Et en 10 secondes ?

4. Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boite une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant, pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g.
Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

5. L'usine produit également des boulons. Ceux-ci sont vendus dans des boites de 100. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boite est réglée sur 836 g.
Une autre machine fait des boites des mêmes boulons, mais de 25 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 25 boulons ?

6. Cette usine produit également des boulons d'une plus grande taille. Ceux-ci sont vendus dans des boites de 10. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boite est réglée sur 178 g.
Une autre machine fait des boites des mêmes boulons, mais de 3 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 3 boulons ?

7. Plusieurs enfants jouent avec des Kapla, c'est un jeu de construction à base de planchettes en bois toutes identiques.
Arthur a empilé 50 planchettes et a ainsi obtenu une tour de 39 cm de hauteur.

- Zoé a empilé 100 planchettes ;
- Evan a empilé 5 planchettes ;
- Lilia a empilé 17 planchettes.

Quelle est la hauteur des tours construites par chaque enfant ?

1. Gabin et Jade s'ennuient à l'arrière de la voiture de leurs parents. Pour s'occuper, en attendant à un feu rouge, ils comptent le nombre de fois que s'allume le clignotant de la voiture devant eux.

- Gabin a compté qu'il s'allumait 35 fois en 25 secondes ;
- Jade a compté qu'il s'allumait 49 fois en 35 secondes.

Combien de fois va s'allumer ce clignotant en une minute ?
Et en 10 secondes ?

2. Un train roule à la vitesse constante de 240 km/h.
Quelle distance parcourt-il en 15 minutes à cette vitesse ?
Combien de temps met-il pour parcourir 100 km à cette vitesse ?

3. Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boite une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant, pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g.
Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

4. L'usine produit également des boulons. Ceux-ci sont vendus dans des boites de 100. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boite est réglée sur 836 g.
Une autre machine fait des boites des mêmes boulons, mais de 25 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 25 boulons ?

5. Cette usine produit également des boulons d'une plus grande taille. Ceux-ci sont vendus dans des boites de 10. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boite est réglée sur 178 g.
Une autre machine fait des boites des mêmes boulons, mais de 3 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 3 boulons ?

6. Sur un plan de l'école de la Terrasse, l'échelle donnée dit que 10 cm sur le plan représentent 25 m en réalité.
Sur le plan, le couloir du deuxième étage de l'école mesure 13,6 cm.
Quelle est la longueur du couloir en réalité ?
Une salle de classe mesure 6 m de large. Quelle est la largeur de cette salle sur le plan ?

7. Plusieurs enfants jouent avec des Kapla, c'est un jeu de construction à base de planchettes en bois toutes identiques.
Arthur a empilé 50 planchettes et a ainsi obtenu une tour de 39 cm de hauteur.

- Zoé a empilé 100 planchettes ;
- Evan a empilé 5 planchettes ;
- Lilia a empilé 17 planchettes.

Quelle est la hauteur des tours construites par chaque enfant ?

Ressource 5 – Proposition de travaux à mener à distance

Travaux en petits groupes 4h30 : 2 × 2h15 (constitution des groupes déterminée).

Deux dates communes à tous sont fixées afin que les enseignants de CM1-CM2 travaillent ensemble autour de la thématique.

Rappel :
Mise en œuvre en classe d'au moins une situation proposée avant la date 1 et recueil des productions des élèves.

Objectifs de travail pour la date 1 :

- analyser les mises en œuvre en classes de situations sur la base d'une analyse des productions des élèves (réussites, erreurs)
- concevoir des fiches de séances dans le domaine de la proportionnalité en vue de mises en œuvre en classe entre les dates 1 et 2.

Entre les dates 1 et 2 :
Mettre en œuvre en classe les séances conçues et recueillir les productions des élèves.

Objectif de travail pour la date 2 :

- analyser les mises en œuvre des séances conçues sur la base d'une analyse des productions des élèves (réussites, erreurs)
- concevoir une progression CM1-CM2 en proportionnalité.

À l'issue de ces deux temps de travail :

- les séances conçues lors de la date 1
- le compte-rendu des analyses menées lors de la date 1 avec, en annexe(s), les productions d'élèves envisagées comme les plus intéressantes à analyser lors des réflexions menées)
- le compte-rendu des analyses menées lors de la date 2 avec, en annexe(s), les productions d'élèves envisagées comme les plus intéressantes à analyser lors des réflexions menées)
- la progression CM1-CM2 conçue lors de la date 2

seront à déposer sur la plate-forme collaborative Tribu ou à envoyer au secrétariat de l'IEN.

Ressource 6 – Approfondissement autour des mises en œuvre en classe

Intention :
Poursuivre le développement des gestes professionnels des enseignants sur la base des mises en œuvres en classe et des analyses transmises.

Phase 1 – Retour réflexifs sur les mises en œuvre en classe et les analyses

Échanges autour des éléments transmis à l'issue du temps de travail à distance.
Ces éléments ont pu mettre en exergue la nécessité d'approfondir certains points essentiels au regard :
- d'interrogations dans la conduite de séances de résolution de problèmes de proportionnalité
- de manques constatés : par exemple, une absence de résolutions de problèmes de proportionnalité dans le cadre de séances de calcul mental.

Phase 2 – Analyse d'un film – pratique professionnelle

Selon les éléments mis en exergue lors de la phase 1 :
- soit analyse d'un film – conduite de séances de résolution de problèmes de proportionnalité en CM1/CM2
- soit analyse d'un film – séance de résolution de problèmes de proportionnalité dans le cadre d'une séance de calcul mental en CM1/CM2.

Cadre général des prises d'images :
Les films ont été tournés en juin 2017 dans une école d'un REP+ de la région parisienne en classe de CM2.
L'enseignante de la classe filmée n'est pas une formatrice et n'a pas une formation initiale en mathématiques ou en sciences.
L'objectif général était de filmer des séances de mathématiques permettant de soulever des échanges en formation.

<u>Film - Séance de résolution de problèmes de proportionnalité en CM1/CM2 :</u>

Consigne :
Pendant le visionnage, identifier les choix faits par l'enseignante à chaque étape : choix des supports d'activités, choix de positionnement, choix de conduite de séance, choix des nombres, choix des procédures, etc.

Visionnage du film et analyse :
Durée du visionnage : 7 min 35 s.

<u>Ce qui devraient ressortir en ayant visionné le film :</u>
- Importance du rôle de l'enseignante durant le temps de recherche (régulation des apprentissages, étayages, validation des réussites, etc.).
- Conduite de la phase de correction collective : correction collective de certains exercices seulement (pas de correction collective pour les exercices réussis par tous les élèves ou pour ceux traités par un petit nombre d'élèves.
- Choix des nombres en jeu et des procédures : pas de « procédures expertes » mais certaines procédures sont plus efficaces que d'autres (moins couteuses en calculs).

<u>Film « Séance de calcul mental sur des exercices de proportionnalité en CM1/CM2 » :</u>

Consigne :
Pendant le visionnage, identifier les choix faits par l'enseignante à chaque étape : choix du support d'activité, choix des nombres, choix des procédures, etc.

Visionnage du film et analyse :
Durée du visionnage : 5 min 36 s.

Ce qui devraient ressortir en ayant visionné le film :

- Importance d'un travail en calcul mental :
    - Faire vivre les acquis (période où il n'est pas nécessairement prévu d'aborder la proportionnalité par ailleurs)
    - Insister sur le sens en oralisant les procédures utilisées (pas de technique, uniquement du sens).
- Jeu sur les variables didactiques : le choix des nombres doit mener les élèves à faire un choix sur la procédure à utiliser, par exemple au CM2 :
    - Simples produits - Exemples exercices 1 et 2 : par 20 ou 60
    - Passage par une valeur intermédiaire en faisant le produit en deux fois – Exemple exercice 2 : recherche de la masse pour 42 objets, puis pour 420
    - Passage par une valeur intermédiaire – Exemple exercice 3 : par 5 objets
    - Passage par l'unité – Exemples exercices 4 et 5 car choix de nombres premiers entre eux.
- Choix des procédures :
    - En une étape au CM1 : propriétés de linéarité
    - En deux étapes au CM2 : propriétés de linéarité, avec notamment la procédure de passage par l'unité
    - Pas d'utilisation du coefficient de proportionnalité ou du produit en croix au CM.
- Pas d'utilisation de tableau → Plutôt encourager les élèves à expliciter ce qu'ils font en s'appuyant sur le sens et sur les grandeurs en jeu dans l'exercice.

Transition :

Les choix faits pour la séance filmée peuvent conduire à réfléchir aux choix des supports d'activités proposés aux élèves.

DOCUMENT POUR LES FORMATEURS – *Film*
Séance de résolution de problèmes de proportionnalité en CM1/CM2
Document et Annexes DGESCO

1. Cadre général des prises d'images

Les films ont été tournés en juin 2017 dans une école d'un REP+ de la région parisienne. Les enseignantes des classes filmées ne sont pas des formatrices et n'ont pas une formation initiale en mathématiques ou en sciences. L'objectif général était de filmer des séances de mathématiques permettant de soulever des échanges en formation en donnant à voir des pratiques de classe intéressantes.

Un travail a été mené pendant quelques séances en amont de la prise d'images afin d'observer les pratiques de classes des enseignantes filmées pour leur proposer quelques aménagements et évolutions. Trois objectifs principaux étaient visés :

- Avoir des séances qui s'inscrivent dans **des séquences très structurées** : introduction d'une notion, compréhension de ce qui est en jeu, institutionnalisation dans les « cahiers de savoirs », temps de renforcement, vérification de l'acquisition des savoirs visés par tous, évaluation.
- Travail sur l'activité mathématique des élèves : **optimiser le temps pendant lequel les élèves font effectivement des mathématiques** pendant chaque séance.
- Centration sur l'**accompagnement individuel de tous les élèves** pendant les temps de résolution d'exercices ou de problèmes : faire en sorte que les élèves les plus fragiles comme ceux ayant le plus d'appétence pour les mathématiques soient actifs et acquièrent de nouvelles compétences, s'assurer que tous les élèves puissent réaliser certaines tâches en fournissant éventuellement l'accompagnement nécessaire pour permettre d'acquérir les connaissances ou compétences qui font défaut, renforcer l'accompagnement individuel permettant de différencier les coups de pouces données à chacun en fonction de ses besoins, etc.

Il s'agit à chaque fois d'une séance à un temps t de la séquence et non d'un modèle à suivre systématiquement. Une séance pour introduire une notion nouvelle, n'est pas construite comme une séance pour renforcer l'acquisition de cette notion ni comme une séance de fin de séquence permettant de s'assurer l'acquisition par tous de cette notion. Des choix sont donc faits sur l'organisation générale (travail individuel, en binôme ou en groupe ; temps de recherche ; temps collectifs et individuels ; etc.), les tâches proposées, l'utilisation ou non d'outils numériques, la façon dont l'enseignant accompagne les élèves, les choix concernant ce qui est mené, etc. Les choix faits pour chaque séance filmée peuvent conduire à réfléchir sur les raisons de ces choix par rapports aux objectifs visés et sur les modifications qui pourraient être apportées pour une séance située à un autre moment de la séquence.

Pendant les séances filmées, il y avait deux caméramans avec trois caméras dont une mobile et un ou deux inspecteurs en font de classe. Ces conditions ont eu assez peu d'effets sur les élèves qui ont un comportement général très proche de celui qu'ils avaient lors des séances observés en amont ; les enseignantes les ont trouvés néanmoins plus réservés qu'à l'habitude. Pour les enseignantes, qui, on le rappelle, ne sont ni formatrices ni spécialistes des mathématiques, on peut facilement imaginer que ces conditions particulières ont eu quelques effets, notamment en ce qui concerne les réactions aux réponses erronées des élèves. Questionner davantage les élèves, sur la façon dont ils étaient arrivés à leur réponse erronée, faisait assurément à prendre le risque de faire face à une procédure difficile à comprendre ou à analyser. Les enseignantes ont donc été moins engagées sur ce point qu'à leur habitude, on peut le regretter, mais aussi le comprendre. Les formateurs qui utiliseront les vidéos dans le cadre de formations n'hésiteront donc pas à proposer des améliorations possibles dans les séances filmées tout en veillant à rappeler les conditions dans lesquelles elles ont été tournées et s'assureront que les échanges se font avec le respect dû à ces enseignantes qui ont accepté de prendre un certain risque pour nous permettre de faire ce que beaucoup de collègues auraient certainement refusé…

2. Le film : Séance de résolution de problèmes de proportionnalité en CM1-CM2

La séance est une séance de milieu de séquence sur la proportionnalité. Des travaux ont été menés en amont pour institutionnaliser différentes procédures possibles pour résoudre des problèmes de proportionnalité. Les procédures étudiées s'appuient sur les propriétés de la linéarité, en une étape ou deux étapes. Les problèmes en deux étapes sont nouveaux pour les élèves de CM1 alors qu'ils sont familiers pour les élèves de CM2 pour qui la procédure dite de « retour à l'unité » a déjà été rencontrée et institutionnalisée.

Objectifs généraux de la séance :

- S'assurer de la maitrise, par tous les élèves, des procédures utilisant les propriétés de linéarité pour résoudre des problèmes de proportionnalité (en une ou deux étapes).
- Renforcer l'aptitude des élèves à voir les relations entre les nombres en jeu dans l'énoncé (faire « parler les nombres ») pour utiliser une procédure juste et pertinente.
- Travailler sur le sens en faisant écrire ce qui est fait, les calculs effectués (pas d'utilisation de « techniques »).
- Travailler sur les vitesses constantes et les échelles au CM2.

Éléments du programme travaillés : Reconnaitre et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée. Mobiliser les propriétés de linéarité (additives et multiplicatives), de proportionnalité, de passage à l'unité.
Repères de progressivité : En CM1, le recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) est privilégié dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers. Ces propriétés doivent être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples (« si j'ai deux fois, trois fois… plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois… plus d'ingrédients » ; « si 6 stylos valent 10 euros et 3 stylos valent 5 euros, alors 9 stylos valent 15 euros »). Les procédures du type passage par l'unité ou calcul du coefficient de proportionnalité sont mobilisées progressivement sur des problèmes le nécessitant et en fonction des nombres (entiers ou décimaux) choisis dans l'énoncé ou intervenant dans les calculs. À partir du CM2, des situations impliquant des échelles ou des vitesses constantes peuvent être rencontrées.

Organisation prévue a priori pour la séance :
Les exercices proposés (voir fiches en annexes) :

	CM1	**CM2**
1	Crêpes	Le clignotant
2	Le clignotant	Le train (vitesse constante)
3	Les vis	Les vis
4	Les 100 boulons	Les 100 boulons
5	Les 10 boulons	Les 10 boulons
6	Les robots	Les robots
7	Les Kapla	Le couloir (échelle)
8		Les Kapla

Il est prévu que la séance soit scindée en deux temps, tout d'abord 25 à 30 minutes de recherche individuelle par les élèves suivies de 10 à 15 minutes de mise en commun, de présentation de procédures et d'échanges.
L'enseignante a prévu d'accompagner les élèves individuellement pendant leur temps de recherche, pour donner éventuellement les coups de pouce nécessaires à chacun pour comprendre et réussir chacun des exercices proposés.
À la fin du temps de recherche, l'enseignante souhaite que :

- les élèves aient traité autant d'exercices qu'il leur est possible dans le temps imparti ;
- tous les élèves travaillent pendant toute la séance, aucun ne doit avoir terminé les exercices proposés (d'où le nombre important d'exercices).
- 100% des élèves aient traité les trois premiers exercices et aient abordé le quatrième exercice.
- 100% des élèves aient réussi les deux premiers exercices et que ces exercices aient été validés par elle.

Pendant le temps de correction, l'enseignante souhaite faire présenter une correction des exercices 3 et 4 qui sont les mêmes pour les deux niveaux. Elle souhaite faire présenter leurs travaux aux élèves en utilisant le vidéoprojecteur et le visualiseur pour projeter la réponse des élèves. Elle envisage de montrer également des procédures erronées pour travailler sur les erreurs, en fonction de ce que les élèves produiront.

Ce qui s'est effectivement passé pendant la séance :

- Les élèves ont tous traité les deux premiers exercices correctement avec un besoin d'accompagnement fort pour quelques-uns, en particulier deux élèves de CM1.
- L'exercice 3, un des premiers exercices en deux étapes pour les CM1, s'est révélé plus difficile à résoudre que prévu pour eux et beaucoup ne l'ont pas encore réussi quand la correction est amorcée.
- Les CM2 ont eu plus de facilité et plus de la moitié d'entre eux ont traité au moins les six premiers exercices.

- Pour l'exercice 3, l'enseignante a commencé par proposer à un élève de CM1 de venir proposer « sa » solution, qui faisait appel à une procédure erronée (retrait d'un même nombre aux deux grandeurs en jeu : « on peut multiplier par 10, si je prends 10 fois plus de boulons, cela pèse 10 fois plus lourd, ou diviser par 10, mais pas soustraire 10, si je retire 10 boulons, la masse ne baisse pas de 10 (grammes)… ». Elle a ensuite demandé à un élève de CM2, de venir proposer « sa » solution, consistant à passer par 10 boulons pour passer de 80 boulons à 30 boulons.
- L'exercice 4 est corrigé ensuite en ne présentant qu'une procédure correcte.

Quelques points importants en formation :
- L'importance du rôle de l'enseignante pendant le temps de recherche pour réguler les apprentissages et fournir les compléments nécessaires à chacun. Elle circule de façon continue en regardant le travail de chacun et en validant les réussites.
- L'activité des élèves : tous les élèves travaillent de façon continue pendant tout le temps de recherche individuelle (aucun élève n'abandonne, aucun élève n'attend parce qu'il a fini…).
- La correction collective de certains exercices seulement : il est inutile de corriger collectivement ce qui a été réussi par tous (et validé dans les cahiers) ou traité par très peu d'élèves (les autres n'en tireraient pas profit).
- Le choix des exercices n'est pas aléatoire : les exercices et les nombres en jeu dans chacun d'eux sont choisis pour permettre de mettre en avant certaines procédures. L'objectif est de montrer que certaines procédures sont plus efficaces que d'autres, il n'y a pas de « procédures expertes » et le terme est à éviter. C'est l'utilisateur des procédures qui fait preuve d'expertise en choisissant la procédure la moins « couteuse » en calculs. Ainsi, pour l'exercice sur les vis, passer par la masse de 10 vis est plus pertinent que de passer par l'unité… Un travail peut être mené en formation pour repérer la procédure la plus pertinente en cours moyen.
- Pendant le temps de formation « à distance », les enseignants peuvent être invités à construire une séance sous le même modèle en utilisant tout ou partie des exercices proposés ici et notamment celui ou ceux étudiés plus particulièrement pendant le premier présentiel.

Un document supplémentaire pour la formation :
Un document supplémentaire proposant six productions d'élèves pour la résolution de l'exercice des vis (exercice 4 – CM1 / exercice 3 – CM2) est proposé en annexe.
Il est destiné à être utilisé en formation.

> Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boîte une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant, pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g.
> Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.
> Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

Deux questions peuvent être posées aux enseignants :
- Analyser les productions d'élèves en relevant les réussites, les erreurs et les procédures utilisées pour résoudre l'exercice.
- Proposer en une à trois phrases ce que vous pourriez dire à l'élève qui a produit chacune des productions lorsque vous circulez dans les rangs.

Exemples de réponses (il ne s'agit que d'exemples, d'autres réponses aussi pertinentes sont possibles) :
- Pour l'élève A :
  - La première ligne correspond à prendre la moitié de vis et dire que cela va peser moitié moins, c'est une utilisation de la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre. À la seconde ligne il veut passer de 40 vis à 30 vis et donc il retire 10 vis, il retire également 10 à la masse ce qui n'a pas de sens car la masse de 10 vis n'est clairement pas 10.
  - L'enseignant qui circule dans les rangs pourrait dire que la première ligne est juste et la valider et dire que la seconde ligne pose problème en invitant l'élève à noter les unités pour chacun des nombres des deux égalités de la ligne.
- Pour l'élève B :
  - La réponse est juste. L'élève utilise deux fois la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre (division par 8 puis multiplication par 3 pour passer de 80 à 30).
  - Tout en validant la réponse et en félicitant l'élève, l'enseignant pourrait l'inviter à essayer d'expliquer ce qu'il a fait notamment en rédigeant une phrase pour dire ce à quoi correspond le 35 trouvé.

- Pour l’élève C :
    - L’élève n’a pas modélisé correctement la situation.
    - Cet élève nécessite un travail un peu plus approfondi, il sera sans doute nécessaire de passer un peu plus de temps avec lui lors de la circulation dans les rangs. L’enseignant doit inviter l’élève à reformuler l’énoncé, d’une part ce que l’on sait et d’autre part ce que l’on cherche.
- Pour l’élève D :
    - L’élève utilise une procédure dite de retour à l’unité. Il a fait deux erreurs de calcul (une pour chaque opération) qui ont conduit à trouver le résultat attendu… Oubli de la virgule dans la division, oubli du décalage dans la multiplication.
    - L’enseignant peut demander si, au vu de l’énoncé, une vis pèse plus ou moins de 10 g. Il peut ensuite demander à l’élève d’interpréter son résultat à la première opération (à quoi correspond 35). Ce qui devrait conduire l’élève à dire qu’une vis pèse moins de 10 g car $80 \times 10 = 800 > 280$ g et que le résultat trouvé à la division (35) est la masse d’une vis… Ce qui doit amener l’élève à conclure que sa réponse contient une erreur…
- Pour l’élève E :
    - Ce qui est fait est juste mais ne répond pas à la question posée… L’élève a trouvé la masse de 32 vis et non celle de 30 vis… L’élève utilise deux fois la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre (division par 10 puis multiplication par 4 pour passer de 80 à 32).
    - L’enseignant doit inviter l’élève à chercher la masse de 30 vis et non celle de 32 vis. L’élève peut éventuellement s’appuyer sur la masse trouvée pour 10 vis.
- Pour l’élève F :
    - L’élève utilise une procédure dite « mixte », il commence par utiliser la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre (division par 8 pour trouver la masse de 10 vis), puis il utilise la propriété de linéarité pour l’addition (ajout de trois fois le masse de 10 vis pour trouver la masse de 30 vis).
    - L’enseignant pourrait inviter l’élève à essayer d’expliquer ce qu’il a fait notamment en rédigeant une phrase pour dire à quoi correspond le 35 trouvé. Il peut aussi l’inviter à rédiger mieux la phrase de conclusion.

Annexe 1 – Fiche Problèmes proportionnalité pour les CM1

CM1

1. Dans le livre de recettes de cuisine de Corentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

Pour 15 crêpes
300 g de farine
3 œufs
75 cL de lait
3 cuillères à soupe d'huile

Pour 25 crêpes
500 g de farine
5 œufs
125 cL de lait
5 cuillères à soupe d'huile

Mais Corentin veut faire 10 crêpes seulement.
Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes ?

2. Madame Lucas veut préparer 60 crêpes pour la fête d'anniversaire de sa fille. Elle a emprunté le livre de recette de Corentin.
Quelles sont les quantités d'ingrédients nécessaires pour faire 60 crêpes ?

5. L'usine produit également des boulons. Ceux-ci sont vendus dans des boîtes de 100. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boîte est réglée sur 836 g.
Une autre machine fait des boîtes des mêmes boulons, mais de 25 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 25 boulons ?

6. Cette usine produit également des boulons d'une plus grande taille. Ceux-ci sont vendus dans des boîtes de 10. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boîte est réglée sur 178 g.
Une autre machine fait des boîtes des mêmes boulons, mais de 3 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 3 boulons ?

3. Gabin et Jade s'ennuient à l'arrière de la voiture de leurs parents. Pour s'occuper, en attendant à un feu rouge, ils comptent le nombre de fois que s'allume le clignotant de la voiture devant eux.

- Gabin a compté qu'il s'allumait 35 fois en 25 secondes ;
- Jade a compté qu'il s'allumait 49 fois en 35 secondes.

Combien de fois va s'allumer ce clignotant en une minute ?
Et en 10 secondes ?

4. Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boîte une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant, pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g.
Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

7. Une usine fonctionne tous les jours (7 jours sur 7) et toute la journée chaque jour (24 heures sur 24). Elle produit des robots ménagers de façon continue. L'usine produit 80 robots par jour.
Combien l'usine produit-elle de robots par semaine ?
Recopier la phrase suivante en la complétant :
« On peut dire qu'il sort un robot de cette usine toutes les ….. minutes. »

8. Plusieurs enfant jouent avec des Kapla, c'est un jeu de construction à base de planchettes en bois toutes identiques.
Alex a empilé 50 planchettes et a ainsi obtenu une tour de 39 cm de hauteur.

- Emma a empilé 100 planchettes ;
- Léo a empilé 5 planchettes ;
- Zoé a empilé 17 planchettes.

Quelle est la hauteur des tours construites par chaque enfant ?

Annexe 2 – Fiche Problèmes proportionnalité pour les CM2

CM2

1. Gabin et Jade s'ennuient à l'arrière de la voiture de leurs parents. Pour s'occuper, en attendant à un feu rouge, ils comptent le nombre de fois que s'allume le clignotant de la voiture devant eux.
   - Gabin a compté qu'il s'allumait 35 fois en 25 secondes ;
   - Jade a compté qu'il s'allumait 49 fois en 35 secondes.

Combien de fois va s'allumer ce clignotant en une minute ?
Et en 10 secondes ?

2. Un train roule à la visite constante de 240 km/h.
Quelle distance parcourt-il en 15 minutes à cette vitesse ?
Combien de temps met-il pour parcourir 100 km à cette vitesse ?

3. Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boîte une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant, pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g.
Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

4. L'usine produit également des boulons. Ceux-ci sont vendus dans des boîtes de 100. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boîte est réglée sur 836 g.
Une autre machine fait des boîtes des mêmes boulons, mais de 25 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 25 boulons ?

5. Cette usine produit également des boulons d'une plus grande taille. Ceux-ci sont vendus dans des boîtes de 10. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boîte est réglée sur 178 g.
Une autre machine fait des boîtes des mêmes boulons, mais de 3 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 3 boulons ?

6. Une usine fonctionne tous les jours (7 jours sur 7) et toute la journée chaque jour (24 heures sur 24). Elle produit des robots ménagers de façon continue. L'usine produit 80 robots par jour.
Combien l'usine produit-elle de robots par semaine ?
Recopier la phrase suivante en la complétant :
« On peut dire qu'il sort un robot de cette usine toutes les ….. minutes. »

7. Sur un plan de l'école Jean Lurçat l'échelle donnée dit que 10 cm sur le plan représentent 25 m en réalité.
Sur le plan, le couloir du deuxième étage de l'école mesure 13,6 cm.
Quelle est la longueur du couloir en réalité ?
Une salle de classe mesure 6 m de large. Quelle est largeur de cette salle sur le plan ?

8. Plusieurs enfant jouent avec des Kapla, c'est un jeu de construction à base de planchettes en bois toutes identiques.
Alex a empilé 50 planchettes et a ainsi obtenu une tour de 39 cm de hauteur.
   - Emma a empilé 100 planchettes ;
   - Léo a empilé 5 planchettes ;
   - Zoé a empilé 17 planchettes.

Quelle est la hauteur des tours construites par chaque enfant ?

Annexe 3 – Six productions d’élèves relatives à l’exercice des vis (Exercice 4 – CM1 / Exercice 3 – CM2)

Élève A

Opérations		Solution
a) 280 – 140 = 140	80 – 40 = 40	a) 30 vis fait 30 g
140 – 10 = 130	40 – 10 = 30	b) 25 boulons fait 209 g
b) 100 – 50 = 50	836 – 418 = 418	
50 – 25 = 25	418 – 209 = 209	

Élève B

Opération	Solution
280 ÷ 8 = 35	Il faut régler pour qu’il y ai 105 g
35 × 3 = 105	Il faudra reler la machine sur 105 g
836 ÷ 4 = 209	Il faudra régler la machine sur 209 g

Élève C

Opérations

$$\begin{array}{r} 280 \\ \underline{\times\ 30} \\ 000 \\ \underline{840\bullet} \\ 8400 \end{array}$$

Solution

Il faudrat régler la masse 8400 g

Élève D

Opérations

$$\begin{array}{r|l} 280 & 80 \\ \cline{2-2} -\underline{240} & 35 \\ 400 & \\ -\underline{400} & \\ 000 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \\ \underline{\times 30} \\ 0 \\ \underline{+105} \\ 105 \end{array}$$

Solution

Il faut régler la masse 105 g

Élève E

Opération	Solution
280 ÷ 10 = 28	Pour 8 il faut régler 28 g
28 × 4 = 112	Pour 32 il fau régler 112 g

Élève F

Opération

280 ÷ 8 = 35

$$\begin{array}{r|l} 280 & 8 \\ \cline{2-2} -\underline{24} & 35 \\ 40 & \\ -\underline{40} & \\ 00 & \end{array}$$

35 + 35 + 35 = 105

Solution

Il faut 105 g

DOCUMENT POUR LES FORMATEURS – *Film*
« Séance de calcul mental sur des exercices de proportionnalité en CM1-CM2 »
Document DGESCO

1. Cadre général des prises d'images

Les films ont été tournés en juin 2017 dans une école d'un REP+ de la région parisienne. Les enseignantes des classes filmées ne sont pas des formatrices et n'ont pas une formation initiale en mathématiques ou en sciences. L'objectif général était de filmer des séances de mathématiques permettant de soulever des échanges en formation en donnant à voir des pratiques de classe intéressantes. Un travail a été mené pendant quelques séances en amont de la prise d'images afin d'observer les pratiques de classes des enseignantes filmées pour leur proposer quelques aménagements et évolutions.

Trois objectifs principaux étaient visés :
- Avoir des séances qui s'inscrivent dans **des séquences très structurées** : introduction d'une notion, compréhension de ce qui est en jeu, institutionnalisation dans les « cahiers de savoirs », temps de renforcement, vérification de l'acquisition des savoirs visés par tous, évaluation.
- Travail sur l'activité mathématique des élèves : **optimiser le temps pendant lequel les élèves font effectivement des mathématiques** pendant chaque séance.
- Centration sur l'**accompagnement individuel de tous les élèves** pendant les temps de résolution d'exercices ou de problèmes : faire en sorte que les élèves les plus fragiles comme ceux ayant le plus d'appétence pour les mathématiques soient actifs et acquièrent de nouvelles compétences, s'assurer que tous les élèves puissent réaliser certaines tâches en fournissant éventuellement l'accompagnement nécessaire pour permettre d'acquérir les connaissances ou compétences qui font défaut, renforcer l'accompagnement individuel permettant de différencier les coups de pouces données à chacun en fonction de ses besoins, etc.

Il s'agit à chaque fois d'une séance à un temps t de la séquence et non d'un modèle à suivre systématiquement. Une séance pour introduire une notion nouvelle, n'est pas construite comme une séance pour renforcer l'acquisition de cette notion ni comme une séance de fin de séquence permettant de s'assurer l'acquisition par tous de cette notion. Des choix sont donc faits sur l'organisation générale (travail individuel, en binôme ou en groupe ; temps de recherche ; temps collectifs et individuels ; etc.), les tâches proposées, l'utilisation ou non d'outils numériques, la façon dont l'enseignant accompagne les élèves, les choix concernant ce qui est mené, etc. Les choix faits pour chaque séance filmée peuvent conduire à réfléchir sur les raisons de ces choix par rapports aux objectifs visés et sur les modifications qui pourraient être apportées pour une séance située à un autre moment de la séquence.

Pendant les séances filmées, il y avait deux caméramans avec trois caméras dont une mobile et un ou deux inspecteurs en font de classe. Ces conditions ont eu assez peu d'effets sur les élèves qui ont un comportement général très proche de celui qu'ils avaient lors des séances observés en amont ; les enseignantes les ont trouvés néanmoins plus réservés qu'à l'habitude. Pour les enseignantes, qui, on le rappelle, ne sont ni formatrices ni spécialistes des mathématiques, on peut facilement imaginer que ces conditions particulières ont eu quelques effets, notamment en ce qui concerne les réactions aux réponses erronées des élèves. Questionner davantage les élèves, sur la façon dont ils étaient arrivés à leur réponse erronée, faisait assurément à prendre le risque de faire face à une procédure difficile à comprendre ou à analyser. Les enseignantes ont donc été moins engagées sur ce point qu'à leur habitude, on peut le regretter, mais aussi le comprendre. Les formateurs qui utiliseront les vidéos dans le cadre de formations n'hésiteront donc pas à proposer des améliorations possibles dans les séances filmées tout en veillant à rappeler les conditions dans lesquelles elles ont été tournées et s'assureront que les échanges se font avec le respect dû à ces enseignantes qui ont accepté de prendre un certain risque pour nous permettre de faire ce que beaucoup de collègues auraient certainement refusé…

2. Le film : Séance de calcul mental en CM1-CM2

La séance est un temps de calcul mental, c'est une séance de début de séquence sur la proportionnalité ; il s'agit de la deuxième séance sur ce thème. La proportionnalité a été travaillée lors de la période précédente avec la classe. L'objectif est de faire vivre les acquis de la période précédente en ravivant ce qui a été vu afin d'éviter que les élèves n'oublient ce qui a été appris.

Lors de la période précédente les élèves ont travaillé sur différentes procédures pour résoudre des problèmes de proportionnalités :

- au CM1, des résolutions s'appuyant sur les propriétés des fonctions linéaires (produits ou sommes) en une étape
- au CM2, des résolutions s'appuyant sur les propriétés des fonctions linéaires (produits ou sommes) en une ou deux étapes et notamment la procédure dite de « retour à l'unité ».

Objectif généraux de la séance :

- Travailler sur le sens en oralisant systématiquement le travail mené (pas d'utilisation de « techniques ») : « si je prends 3 fois plus d'objets, cela va peser trois fois plus lourd… ».
- Utiliser la procédure la plus pertinente en fonction des variables en jeu dans l'énoncé ; le fait de travailler dans le cadre du calcul mental doit permettre d'encourager l'utilisation de procédures efficaces en évitant de recourir systématiquement au « retour à l'unité » qui peut être une procédure « couteuse » en calculs.
- Renforcer l'aptitude des élèves à voir les relations entre les nombres en jeu dans l'énoncé (faire « parler les nombres »).
- S'assurer de la maitrise d'un certain nombre de procédures permettant de résoudre des problèmes de proportionnalité (une étape en CM1, deux étapes en CM2).

Éléments du programme travaillés :
Reconnaitre et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée. Mobiliser les propriétés de linéarité (additives et multiplicatives), de proportionnalité, de passage à l'unité.

Organisation prévue a priori pour la séance :

- Cinq petits problèmes de proportionnalité sont prévus, la forme est toujours la même afin de ne pas perturber les élèves. Les élèves disposent d'une minute pour traiter le problème. Puis la correction est menée au tableau par l'enseignante qui interroge les élèves pour qu'ils décrivent leur procédure. L'objectif est d'obtenir des formulations comme : « 30 objets, c'est 10 fois plus d'objets que 3 objets, donc cela va peser 10 fois plus lourd. Comme 3 objets pèsent 7 kg, alors 30 objets pèsent 10 fois 7 kg, c'est-à-dire 70 kg ».
- Au CM2 le lien entre les nombres est un peu plus compliqué, il peut nécessiter de recourir à une étape intermédiaire.
- Le dernier exercice fait volontairement le choix d'un lien compliqué entre les nombres d'objets pour inviter les élèves à s'adapter et à utiliser la relation entre le nombre d'objet et la masse qui elle est simple (à condition de connaître la table de 7) et permet de trouver immédiatement la masse d'un objet.
- Les cinq diapositives se trouvent en fin de ressource.

Ce qui s'est effectivement passé pendant la séance :

- Les élèves ont eu plus de difficultés que prévu à traiter les différentes questions. Ils ont souvent du mal à oraliser les procédures en utilisant le sens (nécessité de répéter et faire répéter des expressions s'appuyant sur le sens). Ils essaient de mettre en œuvre une « technique », plus qu'un travail sur le sens.
- Le dernier exercice a posé beaucoup de difficulté au CM1, alors qu'il pourrait sans doute être posé au cycle 2, comme problème sur la multiplication.

Quelques points importants en formation :

- L'importance d'un tel travail dans le cadre du calcul mental :
    - pour faire vivre les acquis en menant un tel travail lors d'une période où il n'est pas prévu de parler de la proportionnalité dans le cadre ordinaire de l'enseignement des mathématiques.
    - Pour mener un travail important sur le sens en oralisant les procédures utilisées : pas de technique, uniquement du sens.
    - Pour mener un travail sur les variables didactiques, le choix des nombres par l'enseignant doit mener les élèves à faire un choix sur la procédure à utiliser, par exemple au CM2 :
        - simples produits (par 20 ou 60 pour les deux premiers exercices), ou passage par une valeur intermédiaire en faisant le produit en deux fois (par exemple je cherche la masse pour 42 objets, puis pour 420 dans le deuxième)
        - passage par une valeur intermédiaire (par 5 objets pour le troisième exercice), le passage par l'unité serait une complication inutile qui conduirait à avoir des calculs sur les décimaux

        - passage par l'unité (pour le quatrième et le cinquième exercices), contraint par le fait d'avoir choisi des nombres premiers entre eux
- Le choix des procédures (et donc des variables en amont) :
    - En une étape au CM1 : propriétés de linéarité
    - En deux étapes au CM2 : propriétés de linéarité, avec notamment la procédure dite de « retour à l'unité »
    - Pas d'utilisation du coefficient de proportionnalité ou du produit en croix au cours moyen.
- Pas d'utilisation de tableau. Les tableaux ont tendance à conduire les élèves à travailler sur les lignes et les colonnes plutôt que sur les grandeurs. L'enseignante n'en utilise donc pas avec ses élèves de cours moyen pour encourager les élèves à expliciter ce qu'ils font en s'appuyant sur le sens et sur les grandeurs en jeu dans l'exercice.

Les 5 diapositives :

3 objets identiques pèsent ensemble 7 kg.

CM1
Combien pèsent ensemble 30 de ces objets ?

CM2
Combien pèsent ensemble 60 de ces objets ?

7 objets identiques pèsent ensemble 5 kg.

CM1
Combien pèsent ensemble 21 de ces objets ?

CM2
Combien pèsent ensemble 420 de ces objets ?

10 objets identiques pèsent ensemble 42 kg.

CM1
Combien pèsent ensemble 5 de ces objets ?

CM2
Combien pèsent ensemble 15 de ces objets ?

10 objets identiques pèsent ensemble 45 kg.

CM1
Combien pèsent ensemble 2 de ces objets ?

CM2
Combien pèsent ensemble 3 de ces objets ?

7 objets identiques pèsent ensemble 28 kg.

CM1
Combien pèsent ensemble 2 de ces objets ?

CM2
Combien pèsent ensemble 9 de ces objets ?

Ressource 7 – Quels supports d'activités choisir pour conduire une séance ?

Intention :
Amener les enseignants à se questionner sur différents supports d'activités et sur leur intérêt.

Supports :
Document « Activité flash » (diapositives d'un diaporama) [cf. Ressource 6 - Film « Séance de calcul mental »]
Document « Manuels » (double page du manuel Cap Maths CM1)
Document « Résolution de problèmes » (fiche d'exercices CM1)
Document « Document ressource » (extrait de la ressource Eduscol – Activité Puzzle)
Document « Problème à prise d'initiative » (problème « la botte du Géant »)
Une affiche par support d'activité – Feutres (5 couleurs différentes).

Modalités de travail :
« World Café »

- Répartitions des enseignants en 5 groupes en vue de débattre des 5 documents proposés en petits groupes, sur la base des questions suivantes : *(indiquer, sur chaque affiche, le titre et les trois questions)*
  - Quelle place pour ce support d'activité ?
  - Quelle régularité au cours de l'année scolaire ?
  - Quel intérêt de ce support d'activité ?
- À intervalles réguliers (5-10 minutes), les participants changent de table ; un participant reste à la table et résume la conversation précédente aux nouveaux arrivés
- Les conversations en cours sont alors enrichies avec les idées issues des conversations précédentes avec les nouveaux participants.

Mise en commun :
Au terme du processus de « World Café », les principales idées sont résumées en grand groupe.

Quelques remarques sur certains types de documents proposés :
Document « Activité flash » (cf. Ressource 6 - Film « Séance de calcul mental ») :

  - Activité attendue sur un temps court (quelques minutes)
  - Activités à proposer de façon régulière, tout au long du cycle pour être efficaces
  - Activités qui se prêtent à l'utilisation de supports variés : papier, diaporama, enregistrement oral.
- Document « Manuels » :
  - Temps court / long
  - Tâches intermédiaires
- Document « Résolution de problèmes » :
  - Temps long
  - Tâches intermédiaires
- Document « Document ressource » :
  - Temps long
  - Problème de recherche
  - Autres exemples : « Bandes colorées » d'ERMEL CM1, « Le poids des billes » (A. SIMARD)
- Document « Problème à prise d'initiative »
  - Temps long
  - Problème de recherche, en réinvestissement, en décroché
  - Les questions posées sont suffisamment ouvertes pour permettre la prise d'initiatives et la mise en œuvre de plusieurs stratégies
  - Autres exemples : Estimer un grand nombre : « Combien de coquillettes dans un paquet de 500g ? », Histoire et frise : « Longueur d'une frise ? »

Point de vigilance :
Diversifier les supports d'activités proposés aux élèves (au-delà du manuel et de la fiche d'exercices).

Vous êtes tous prêts ?

3 objets identiques pèsent ensemble 7 kg.

CM1
Combien pèsent ensemble 30 de ces objets ?

CM2
Combien pèsent ensemble 60 de ces objets ?

7 objets identiques pèsent ensemble 5 kg.

CM1
Combien pèsent ensemble 21 de ces objets ?

CM2
Combien pèsent ensemble 420 de ces objets ?

10 objets identiques pèsent ensemble 42 kg.

CM1
Combien pèsent ensemble 5 de ces objets ?

CM2
Combien pèsent ensemble 15 de ces objets ?

10 objets identiques pèsent ensemble 45 kg.

CM1
Combien pèsent ensemble 2 de ces objets ?

CM2
Combien pèsent ensemble 3 de ces objets ?

7 objets identiques pèsent ensemble 28 kg.

CM1
Combien pèsent ensemble 2 de ces objets ?

CM2
Combien pèsent ensemble 9 de ces objets ?

DOCUMENT POUR LES ENSEIGNANTS – *« Manuel »*
Cap Maths CM1, p. 116-117

UNITÉ 8

Proportionnalité (1)

Je cherche — AVEC QUATRE BANDES

A Gaïa met bout à bout des bandes vertes, toutes de même longueur.
En mettant bout à bout 4 bandes vertes, elle obtient une longueur de 8 cm.

Quelle longueur obtiendra-t-elle en mettant bout à bout :
a. 8 bandes vertes ?
b. 12 bandes vertes ?
c. 40 bandes vertes ?
d. 48 bandes vertes ?

B Sofia met bout à bout des bandes rouges, toutes de même longueur.
En mettant bout à bout 4 bandes rouges, elle obtient une longueur de 6 cm.

Quelle longueur obtiendra-t-elle en mettant bout à bout :
a. 8 bandes rouges ?
b. 12 bandes rouges ?
c. 40 bandes rouges ?
d. 48 bandes rouges ?

C Lucas met bout à bout des bandes bleues, toutes de même longueur.
En mettant bout à bout 4 bandes bleues, il obtient une longueur de 9 cm.
Quelle longueur obtiendra-t-il en mettant bout à bout :
a. 8 bandes bleues ?
b. 12 bandes bleues ?
c. 40 bandes bleues ?
d. 48 bandes bleues ?

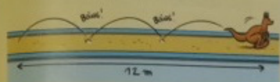
Je m'entraine

PROBLÈMES RELATIFS À DES LONGUEURS (45)

1 Une pile de 2 pots de confiture identiques a une hauteur de 19 cm.
Quelle sera la hauteur d'une pile de :
a. 4 pots de confiture identiques aux précédents ?
b. 6 pots de confiture identiques aux précédents ?

2 Lucas a remarqué qu'en faisant 5 tours de pédalier, son vélo avançait de 12 mètres.
De quelle distance avance son vélo lorsqu'il fait :
a. 10 tours de pédalier ?
b. 20 tours de pédalier ?

3 Un kangourou fait des sauts réguliers. En 3 sauts, il avance de 12 mètres.



a. De combien avance-t-il en faisant :
- 6 sauts ?
- 12 sauts ?
- 15 sauts ?
- 21 sauts ?

b. Combien de sauts doit-il faire pour avancer de :
- 120 m ?
- 36 m ?

4 En 6 bonds, un lièvre parcourt 10 mètres.
a. Quelle distance parcourt-il :
- en 3 bonds ?
- en 12 bonds ?
- en 30 bonds ?
- en 15 bonds ?
- en 60 bonds ?
- en 42 bonds ?

b. Combien de bonds doit-il faire pour parcourir :
- 30 mètres ?
- 40 mètres ?
- 15 mètres ?
- 55 mètres ?

PROBLÈME RELATIF À DES PRIX (45)

5 Chez « Fleurs du jour », 6 roses coutent 9 €.
Chez « Florilège », 6 roses coutent 12 €.
Dans chaque magasin, combien coutent :
a. 12 roses ?
b. 3 roses ?
c. 15 roses ?
d. 30 roses ?

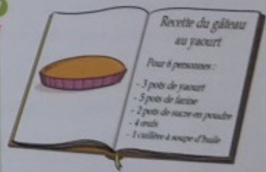
PROBLÈME RELATIF À DES MASSES (45)

6 Dix morceaux de sucre pèsent 56 grammes.

Combien pèsent :
a. 20 morceaux ?
b. 100 morceaux ?
c. 110 morceaux ?
d. 5 morceaux ?
e. 25 morceaux ?
f. 55 morceaux ?

PROBLÈME RELATIF À DES QUANTITÉS (45)

7

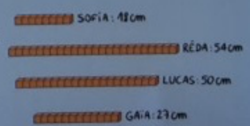


Quelle quantité de chaque ingrédient faut-il prévoir pour faire ce gâteau pour :
a. 12 personnes ?
b. 3 personnes ?
c. 18 personnes ?
d. 30 personnes ?
e. 15 personnes ?
f. 33 personnes ?

ÉNIGME

Où est l'erreur ?

Sofia, Réda, Lucas et Gaïa ont construit des barres avec des cubes tous identiques, puis ils ont mesuré leurs barres.
Un seul personnage s'est trompé en mesurant.
Lequel ? Explique ta réponse.
Quelle mesure aurait-il dû trouver ?
Les dessins ne sont pas en vraie grandeur. Tu ne peux pas utiliser ton double décimètre.



1. Dans le livre de recettes de cuisine de Corentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

Pour 15 crêpes	Pour 25 crêpes
300 g de farine	500 g de farine
3 œufs	5 œufs
75 cL de lait	125 cL de lait
3 cuillères à soupe d'huile	5 cuillères à soupe d'huile

Mais Corentin veut faire 10 crêpes seulement.
Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes ?

2. Madame Lucas veut préparer 60 crêpes pour la fête d'anniversaire de sa fille. Elle a emprunté le livre de recette de Corentin.
Quelles sont les quantités d'ingrédients nécessaires pour faire 60 crêpes ?

3. Gabin et Jade s'ennuient à l'arrière de la voiture de leurs parents. Pour s'occuper, en attendant à un feu rouge, ils comptent le nombre de fois que s'allume le clignotant de la voiture devant eux.

- Gabin a compté qu'il s'allumait 35 fois en 25 secondes ;
- Jade a compté qu'il s'allumait 49 fois en 35 secondes.

Combien de fois va s'allumer ce clignotant en une minute ?
Et en 10 secondes ?

4. Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boite une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant, pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g.
Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

5. L'usine produit également des boulons. Ceux-ci sont vendus dans des boites de 100. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boite est réglée sur 836 g.
Une autre machine fait des boites des mêmes boulons, mais de 25 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 25 boulons ?

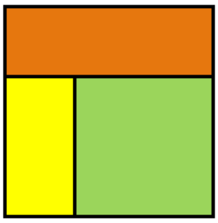
6. Cette usine produit également des boulons d'une plus grande taille. Ceux-ci sont vendus dans des boites de 10. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boite est réglée sur 178 g.
Une autre machine fait des boites des mêmes boulons, mais de 3 boulons seulement.
Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 3 boulons ?

7. Plusieurs enfants jouent avec des Kapla, c'est un jeu de construction à base de planchettes en bois toutes identiques.
Arthur a empilé 50 planchettes et a ainsi obtenu une tour de 39 cm de hauteur.

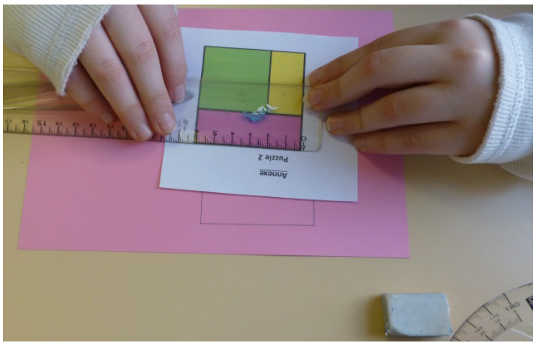
- Zoé a empilé 100 planchettes ;
- Evan a empilé 5 planchettes ;
- Lilia a empilé 17 planchettes.

Quelle est la hauteur des tours construites par chaque enfant ?

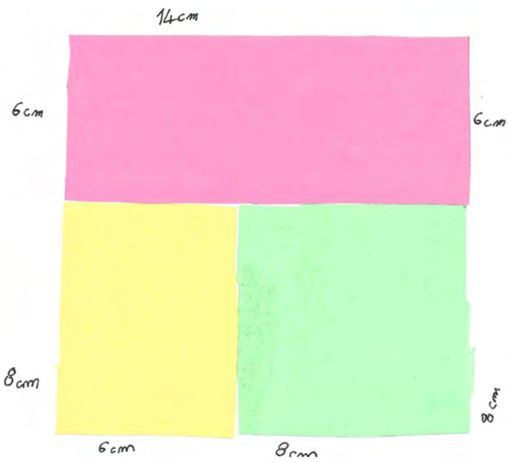
> Agrandis les 3 pièces de la figure de façon à ce que les segments mesurant 2 cm mesurent finalement 6 cm.



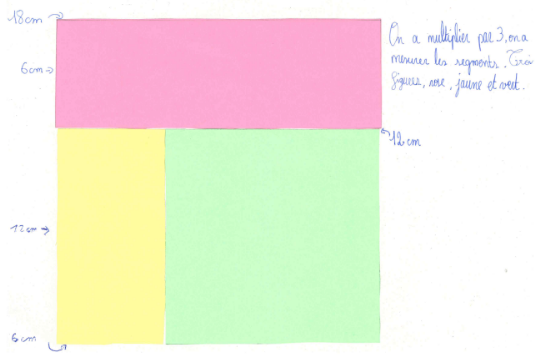
Exemples de productions d'élèves



Sur la figure ci-dessus, l'élève a transformé les segments mesurant initialement 2 cm en segments mesurant 6 cm en ajoutant 4 cm à leurs mesures. Puis, il a ajouté 4 cm aux segments de 4 cm et aux segments de 6 cm. Il s'est rendu compte que le rectangle rose dont la longueur mesure 6 cm + 4 cm = 10 cm n'est pas assez grand.



Sur la figure ci-dessus, l'élève a transformé les segments initialement de 2 cm en 6 cm. Puis, il a ajouté 4 cm aux segments de 4 cm et aux segments de 6 cm. Se rendant compte que le rectangle rose qui mesure 10 cm n'était pas assez grand, il l'a construit de 14 cm pour correspondre à 8 + 6 et avoir une figure complète.



Ci-dessus, les élèves ont agrandi leur figure en multipliant toutes les longueurs par 3.

Quelle est la taille du géant ?

ABEL
LENY
ELYNE
INÈS
MAXIME

On cherche le point commun entre le visiteur et le géant : le pied. Le pied du visiteur : 1,2 cm Le pied du géant : 9,5 cm Combien de fois le pied du géant est plus grande que celui du visiteur ? On fait la division : 9,5 ÷ 1,2 = 7,9 on suppose que le visiteur mesure 1,75 m .

Le géant mesure donc : 1,75 X 7,9 = 13,8 m

Et on peut rajouter que le géant a les même proportion que nous.

Jade
Zélie
Léo
Yanis

Hipotèse 1

On dit que le monsieur mesure 180 cm. Du talon à la moitié de la jambe : on compte 30 cm. On divise 180 cm par 30 cm et on trouve 6. Pour le géant du talon à la moitie de la jambe on mesure 180cm (la taille de l'homme). On multiplie 180 cm par 6 pour trouver sa taille totale. On trouve 1080 cm = 10,80 m

La proportion du géant est normal.

Hipotèse 2

Le pied du bonhome fait 1 cm et le pied du géant 10 cm alors on peux dire que le bonhomme est 10 fois plus petit et que le géant est 10 fois plus grand que le bonhomme. (180 cm x 10 cm = 1800 cm)

Le géant a la même proportion que nous.

180 cm est la taille moyenne d'un homme.

Le géant mesure 18 m

DOCUMENT POUR LES FORMATEURS – *Autres exemples de « Document ressource »*

Extraits du diaporama de la conférence d'Arnaud SIMARD – 1er février 2013 - Rouen

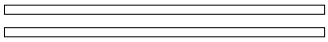
Bandes colorées – ERMEL CM1

Objectifs :

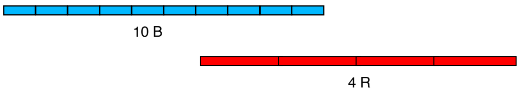
- Se familiariser avec une situation de proportionnalité
- Mettre en lumière des procédures additives, multiplicatives
- Valider mentalement et/ou expérimentalement des procédures.

Matériel : un stock de petites bandes bleues, un stock de petites bandes rouges

Deux bandes blanches de même longueur



On colle bout à bout des petites bandes bleues pour remplir une bande blanche…idem avec des bandes rouges



Variable didactique de la situation :

- rapport 10 pour 4
- nombres pairs (recours aux moitiés)
- pas d'instruments de mesure
- présentation du rapport sur des bandes blanches :

→ 4 rouges valent 10 bleues
Utilisation des propriétés de linéarité

→ 1 rouge vaut 2 bleues et la moitié d'une bleue
Utilisation du coefficient de proportionnalité

Le maître montre une bande réalisée avec 25 bandes bleues (puis il la cache).

« Combien de bandes rouges faut-il pour faire une bande de la même longueur ? »

- différentes procédures possibles sans recours à la manipulation (linéarité avec ou sans dessin)
- erreurs attendues « modèle additif » (+15 ou -6) ou « affine » (25 = 2×10+5 donc 2×4+5)
- recours à la manipulation pour validation

Prolongements :

- Même question avec 15 B, 40 B, 75 B, 240 B, 395 B…
- Questions dans « l'autre sens » : équivalence en bandes bleues de 16 bandes rouges, 30 R…
- Critique de procédures d'élèves fictifs pour confrontation aux erreurs classiques

Le poids des billes – CM2/6e - A. SIMARD

Objectifs :

- Traiter une situation de proportionnalité par différentes procédures (linéarité, passage par l'unité, ….)
- Trouver la procédure la moins « couteuse » (la plus efficace)

Bon de Commande

Nous souhaitons savoir la masse de	prix	Choix (mettre une croix)
14 billes	3 €	
24 billes	4 €	
32 billes	2 €	
33 billes	2 €	
40 billes	10 €	
47 billes	4 €	
48 billes	4 €	
79 billes	1 €	

« Vous devez trouver la masse de 80 billes en dépensant le moins d'argent possible. Chaque groupe dispose de 15 €.»

Variables didactiques :

- Les nombres de billes proposés, évidemment la masse d'une bille n'est pas en vente !
- Le nombre de billes total (décompositions…)
- Les prix fixés (« plus c'est cher, plus c'est simple »)

Déroulement :

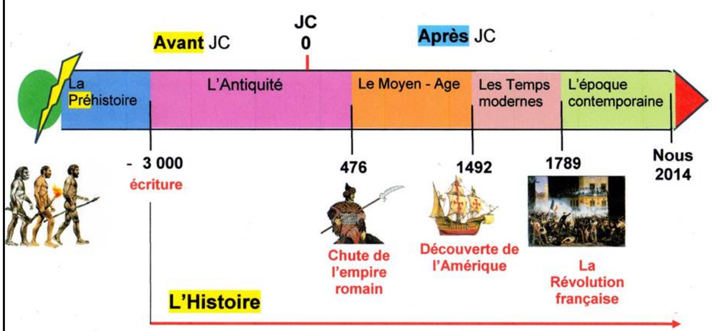
- Les élèves discutent de leur commande
- Ils « achètent » à l'enseignant
- Ils résolvent le problème
- Synthèse sur les procédures et leur coût…

Estimer un grand nombre

« Combien de coquillettes dans un paquet de 500 g ? »

Histoire et frise

« Longueur d'une frise ? »



Ressource 8 - Quelle progressivité dans les procédures attendues ?

Intention :
Amener les enseignants à déterminer des repères de progressivité dans les procédures attendues au cycle 3.

Phase 1 – Un problème et des questions

But de l'activité :
Se questionner sur les procédures attendues à différentes étapes du cycle 3 et sur leur progressivité.

Supports :
Document « Problèmes de billes » - individuel – Format A5.
Document « Problèmes de billes et progressivité dans les procédures attendues au CM » - 1 par groupe - Format A3.

Consigne :
On dispose d'un sac de billes identiques.
On connait la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g).

Voici une liste de questions :
Quelle est la masse de 1 bille ?
Quelle est la masse de 2 billes ?
Quelle est la masse de 6 billes ?
Quelle est la masse de 7 billes ?
Quelle est la masse de 8 billes ?
Quelle est la masse de 10 billes ?
Quelle est la masse de 13 billes ?
Quelle est la masse de 20 billes ?
Quelle est la masse de 21 billes ?
Quelle est la masse de 28 billes ?
Quelle est la masse de 87 billes ?
Quelle est la masse de 125 billes ?
Quelle est la masse de 250 billes ?
Quelle est la masse de 500 billes ?

Déterminer quelles questions poser aux élèves à différentes étapes du CM (début CM1, fin CM1, début CM2, fin CM2) en vue d'établir une progressivité dans les procédures attendues.

Remarque : une même question peut être posée à différentes étapes.

Modalités de travail :
- Temps de recherche individuelle
- Travail en groupes de 3-4 enseignants – Document A3 à compléter en groupes
- Mise en commun : échanges et débats sur les productions.

Repères proposés par Arnaud SIMARD :

Début CM1	Fin CM1
Procédures attendues : Linéarité somme et différence	Procédures attendues : Linéarité somme, différence, double et mixte (facile à identifier)
Questions relatives au problème des billes : Quelle est la masse de 8 billes ? Quelle est la masse de 2 billes ?	Questions relatives au problème des billes : Quelle est la masse de 6 billes ? Quelle est la masse de 10 billes ? Quelle est la masse de 13 billes ? Quelle est la masse de 7 billes ?

Début CM2	Fin CM2
Procédures attendues : Linéarité somme, différence, multiple, diviseur, mixte	Procédures attendues : Linéarité et passage à l'unité
Questions relatives au problème des billes : Quelle est la masse de 21 billes ? Quelle est la masse de 28 billes ? Quelle est la masse de 500 billes ? Quelle est la masse de 250 billes ? Quelle est la masse de 125 billes ?	Questions relatives au problème des billes : Quelle est la masse de 20 billes ? Quelle est la masse de 21 billes ? Quelle est la masse de 1 bille ? Quelle est la masse de 87 billes ?
Début 6^{e}	**Fin 6^{e}**
Procédures attendues : Linéarité, passage à l'unité et coefficient de proportionnalité	Procédures attendues : Linéarité, passage à l'unité, coefficient de proportionnalité et tableau de proportionnalité
Questions relatives au problème des billes : À l'aide du tableur, donner la masse de tous les paquets de moins de 180 billes.	Questions relatives au problème des billes : Résumer sous forme de tableau la situation de la masse des billes en sachant faire apparaitre les opérations de linéarité et le coefficient de proportionnalité.

Phase 2 – Synthèse collective

« Le sens de la proportionnalité ne doit pas se perdre au profit d'une représentation (tableau) et d'une « technique » (calcul sur les lignes et les colonnes).
Pour parler de proportionnalité avec des élèves de cycle 3 (et 4), il est important de ne pas systématiser la représentation sous forme de tableau de nombres ».
(Arnaud SIMARD, 26 septembre 2017, Conférence, Poitiers)

→ **Ne pas systématiser la représentation sous forme de tableau de nombres :**
- Point de vigilance – Ressource 1 : Pas de tableau avant d'avoir installé des raisonnements oralisés stables (si j'ai deux fois plus de …)

Mais aussi :
- Ne pas toujours utiliser une présentation en tableau pour des problèmes de proportionnalité
- Utiliser des tableaux dans des situations où il ne s'agit pas de proportionnalité afin que les élèves ne fassent pas un lien systématique entre proportionnalité et tableau.

→ Cela nécessite de prendre de la distance par rapport au manuel.

Progressivité dans les procédures attendues au CM :
Priorité au CM1-CM2 : donner du sens
→ Sur le cycle 3 : linéarité, puis passage à l'unité, puis coefficient de proportionnalité.
- Début CM1 : linéarité somme et différence
- Fin CM1 : linéarité somme, différence, double et mixte (facile à identifier)
- Début CM2 : linéarité somme, différence, multiple, diviseur et mixte
- Fin CM2 : linéarité et passage à l'unité
- Début 6^{e} : linéarité, passage à l'unité et coefficient de proportionnalité
- Fin 6^{e} : linéarité, passage à l'unité, coefficient de proportionnalité et tableau de proportionnalité.

Point de vigilance : Établir une progressivité des procédures attendues sur le cycle 3 - linéarité, puis passage à l'unité, puis coefficient de proportionnalité.

Remarque :
Ressource Eduscol *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3* (p. 3) :
« L'enseignant permet aux élèves de dégager les avantages et les inconvénients de différentes procédures possibles mais <u>ne les présente pas comme les seules procédures attendues</u> lors de la résolution d'un problème relevant de la proportionnalité ».

DOCUMENT POUR LES ENSEIGNANTS – *Problèmes de billes*

On dispose d'un sac de billes identiques.
On connait la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g).

Voici une liste de questions :

Quelle est la masse de 1 bille ?
Quelle est la masse de 2 billes ?
Quelle est la masse de 6 billes ?
Quelle est la masse de 7 billes ?
Quelle est la masse de 8 billes ?
Quelle est la masse de 10 billes ?
Quelle est la masse de 13 billes ?
Quelle est la masse de 20 billes ?
Quelle est la masse de 21 billes ?
Quelle est la masse de 28 billes ?
Quelle est la masse de 87 billes ?
Quelle est la masse de 125 billes ?
Quelle est la masse de 250 billes ?
Quelle est la masse de 500 billes ?

Déterminer quelles questions poser aux élèves à différentes étapes du CM (début CM1, fin CM1, début CM2, fin CM2) en vue d'établir une progressivité dans les procédures attendues.

Remarque : une même question peut être posée à différentes étapes.

DOCUMENT POUR LES ENSEIGNANTS – *Problèmes de billes et progressivité dans les procédures attendues au CM*

On dispose d'un sac de billes identiques. On connait la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g).

Début CM1	**Fin CM1**
Procédures attendues :	Procédures attendues :
Questions relatives au problème des billes :	Questions relatives au problème des billes :
Début CM2	**Fin CM2**
Procédures attendues :	Procédures attendues :
Questions relatives au problème des billes :	Questions relatives au problème des billes :

DOCUMENT POUR LES FORMATEURS – *Exemple de progression cycle 3 – Proportionnalité*
École Jean Lurçat – REP+ - Gennevilliers

Remarque : La durée de chaque période scolaire est découpée en deux ou trois périodes de trois semaines.

Classe de CM1

Calcul	Calcul mental	Grandeurs et mesures Espace et géométrie
Période scolaire 4 - 2e partie		
Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en ayant recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers (« si j'ai deux fois, trois fois … plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois … plus d'ingrédients » ; « si 6 stylos valent 10 euros et 3 stylos valent 5 euros, alors 9 stylos valent 15 euros »).	Résoudre mentalement des petits problèmes de proportionnalité.	Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en ayant recours aux propriétés de linéarité.
Période scolaire 5 - 2e partie		
Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en ayant recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers et des nombres décimaux.	Résoudre mentalement des petits problèmes de proportionnalité.	Reprise du travail sur les grandeurs et la proportionnalité mené à la période précédente. Problèmes de proportionnalité mettant en jeu des nombres entiers et des nombres décimaux.
Période scolaire 5 - 3e partie		
Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en ayant recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers et des nombres décimaux.		Reprise du travail sur les grandeurs et la proportionnalité mené aux périodes précédentes.

Classe de CM2

Calcul	Calcul mental	Grandeurs et mesures
Période scolaire 2 - 1e partie		
Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en ayant recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) et la procédure dite de retour à l'unité dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers et des nombres décimaux.		Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en ayant recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) et la procédure dite de retour à l'unité dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers et des nombres décimaux.
Période scolaire 4 - 2e partie		
Reconnaitre et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant les propriétés de linéarité additive et multiplicative ou une procédure dite de passage par l'unité.	Résoudre mentalement des petits problèmes de proportionnalité.	Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en ayant recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) ou une procédure dite de passage par l'unité. Proposer des situations impliquant des échelles ou des vitesses constantes.
Période scolaire 5 - 2e partie		
	Résoudre mentalement des petits problèmes de proportionnalité.	Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en ayant recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) ou une procédure dite de passage par l'unité, des situations impliquant des échelles ou des vitesses constantes sont proposées.
Période scolaire 5 - 3e partie		
		Poursuite du travail mené à la période précédente.

Classe de 6e

Des procédures du type calcul du coefficient de proportionnalité sont mobilisées progressivement sur des problèmes le nécessitant.
Poursuite du travail sur des situations impliquant des échelles ou des vitesses constantes.
Sens de l'expression « …% de ».
Application d'un taux de pourcentage.
Utiliser des exemples de tableaux de proportionnalité.

Récapitulatif des points de vigilance mis en exergue dans les ressources

- Pas de tableaux avant d'avoir installé des raisonnements oralisés stables.
- Lister les implicites, en lever certains et en laisser d'autres.
- Interroger les énoncés en se demandant quelles procédures ils privilégient.
- Varier le type d'énoncés : rapports internes (à une même grandeur) et rapports externes (entre deux grandeurs).
- Diversifier les supports d'activités proposés aux élèves (au-delà du manuel et de la fiche d'exercices).
- Établir une progressivité des procédures attendues sur le cycle 3 - linéarité, puis passage à l'unité, puis coefficient de proportionnalité.

→ Amener les élèves à pratiquer et maitriser plusieurs procédures, passer de l'une à l'autre en fonction des situations, donc à faire le bon choix stratégique.
→ Nécessité de disposer de faits numériques et de procédures automatisées en calcul mental.

Mots-clés : Modélisation – Diversité des procédures - Progressivité

Bibliographie du dossier de formation

Eduscol, 2016, *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3*.
Eduscol, 2016, *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3 – Activité : Mousse au chocolat*.
Eduscol, 2016, *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3 – Activité : Puzzle*.
Eduscol, 2016, *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3 – Exemples illustrant la notion de coefficient de proportionnalité*.
SCEREN, 2012, *Le nombre au cycle 3 : apprentissages numériques – Partie 5*, p. 64-74.
CNDP, 2002, *Document d'application des programmes, Mathématiques, cycle des approfondissements*.
[Exploitation des données numériques p. 16-17 et Agrandissement, réduction p. 34]

Ouvrages :
BONNET N., 2011, *La proportionnalité sans problème – 200 exercices corrigés*, CRDP de Franche-Comté.
ERMEL, 2005, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*, Hatier.
ERMEL, 2005, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM2*, Hatier.

Articles :
ASSELAIN-MISSENARD C., PLANE H., 2009, « La règle de trois », *APMEP-PLOT*, n°26, p. 19-21.
COMIN E., 2003, « Des graines et des souris », *Grand N*, n°72, p. 41-73.
DROUIN F., 2009, « Le retour de la « Règle de trois »… », *APMEP Petit vert*, n°484, p. 577-583.
HERSANT M., 2005, « La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui », *Repères IREM*, n°59, p. 1-40.
LEVAIN J-P, LE BORGNE P., SIMARD A., DIDIERJEAN A., 2017, « Effet de la mastérisation sur l'expertise des étudiants et professeurs des écoles stagiaires en résolution de problèmes de proportionnalité », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Volume n°22, IREM de Strasbourg, p. 9-42.
SIMARD A., 2012, « Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique », *Petit x*, n°89, p. 51-62.
SIMARD A., 2012, « Proportionnalité en CM2 et sixième », *Petit x*, n°90, p. 35-52.

Conférence :
SIMARD A., 2013, « Proportionnalité », Conférence, Rouen, 1er février 2013.
SIMARD A., 2017, « Proportionnalité », Conférence, ESENESR, Poitiers, 26 septembre 2017.