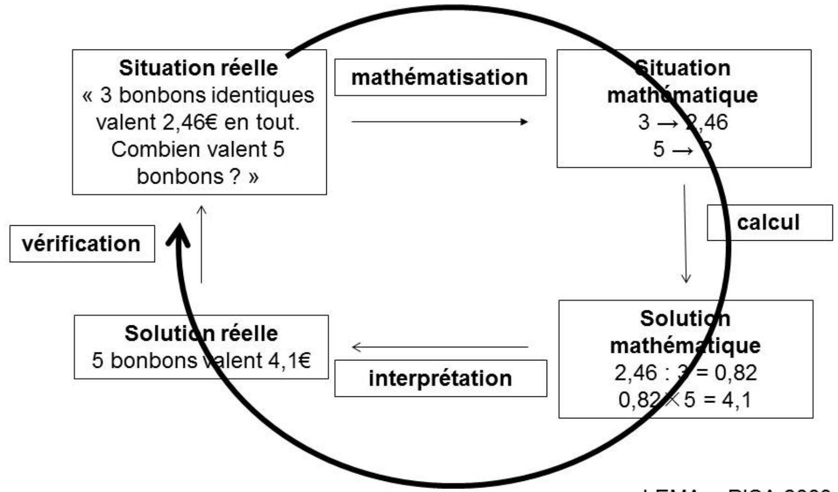
PROPORTIONNALITÉ

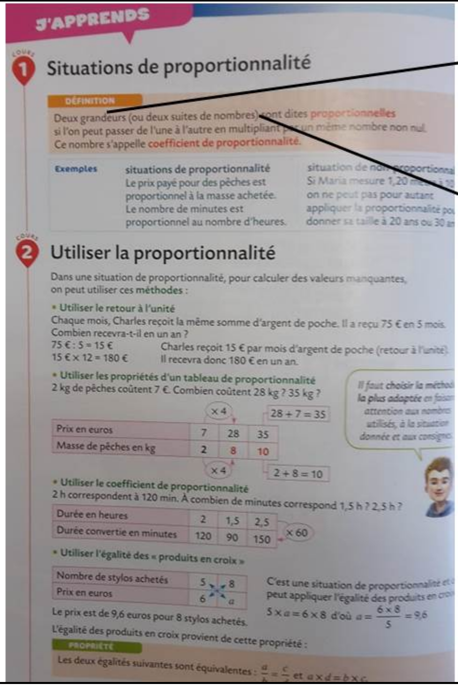
Septembre 2017

Arnaud Simard
ESPE de l'Université de Franche-Comté

La proportionnalité : une modélisation du réel.



LEMA – PISA 2003



J'APPRENDS

1 Situations de proportionnalité

DÉFINITION

Deux grandeurs (ou deux suites de nombres) sont dites **proportionnelles** si l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un même nombre non nul. Ce nombre s'appelle **coefficient de proportionnalité**.

Exemples

situations de proportionnalité
Le prix payé pour des pêches est proportionnel à la masse achetée.
Le nombre de minutes est proportionnel au nombre d'heures.

situation de non proportionnalité
Si Maria mesure 1,20 m à … on ne peut pas pour autant appliquer la proportionnalité pour donner sa taille à 20 ans ou 30 ans

2 Utiliser la proportionnalité

Dans une situation de proportionnalité, pour calculer des valeurs manquantes, on peut utiliser ces **méthodes** :

- **Utiliser le retour à l'unité**

Chaque mois, Charles reçoit la même somme d'argent de poche. Il a reçu 75 € en 5 mois. Combien recevra-t-il en un an ?

75 € : 5 = 15 € — Charles reçoit 15 € par mois d'argent de poche (retour à l'unité).
15 € × 12 = 180 € — Il recevra donc 180 € en un an.

- **Utiliser les propriétés d'un tableau de proportionnalité**

2 kg de pêches coûtent 7 €. Combien coûtent 28 kg ? 35 kg ?

Prix en euros	7	28	35
Masse de pêches en kg	2	8	10

$\times 4$ — $28 + 7 = 35$ — $2 + 8 = 10$

Il faut choisir la méthode la plus adaptée en faisant attention aux nombres utilisés, à la situation donnée et aux consignes.

- **Utiliser le coefficient de proportionnalité**

2 h correspondent à 120 min. À combien de minutes correspond 1,5 h ? 2,5 h ?

Durée en heures	2	1,5	2,5
Durée convertie en minutes	120	90	150

$\times 60$

- **Utiliser l'égalité des « produits en croix »**

Nombre de stylos achetés	5	8
Prix en euros	6	a

C'est une situation de proportionnalité et on peut appliquer l'égalité des produits en croix :
$5 \times a = 6 \times 8$ d'où $a = \frac{6 \times 8}{5} = 9,6$

Le prix est de 9,6 euros pour 8 stylos achetés.

L'égalité des produits en croix provient de cette propriété :

PROPRIÉTÉ

Les deux égalités suivantes sont équivalentes : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $a \times d = b \times c$.

Définition en termes de grandeurs (mesurables)

Définition en termes algébriques

Définition 1 : Les rapports entre les nombres se correspondant sont égaux.

Définition 2 : Il existe une fonction linéaire ($x \to a \times x$) qui décrit la liaison entre les suites de nombres considérés.

Maths Monde cycle 4

Attention

Le sens de la proportionnalité (liaison multiplicative entre des grandeurs) ne doit pas se perdre au profit d'une représentation (tableau) et d'une « technique » (calcul sur les lignes et les colonnes).

Pour parler de proportionnalité **avec des élèves** (cycle 3 et 4) il est important de **ne pas systématiser la représentation sous forme de tableau** de nombres.

Pour parler de proportionnalité avec **des personnes initiées** (étudiants, enseignants…) et lorsque les implicites sont levés, nous pouvons nous permettre de résumer les situations sous forme de tableau (« *la rigueur n'a de sens que là où il y a ambigüité* »)

Situation d'achat de bonbons à 0,82 € l'unité

Nombre de bonbons	1	3	15
Prix à payer	0,82	2,46	12,30

La **fonction linéaire** associée à cette situation de proportionnalité est
$F(X) = 0{,}82 \times X$

$F(3) = 0{,}82 \times 3 = 2{,}46$

$F(15) = 0{,}82 \times 15 = 12{,}30$

Le tableau de proportionnalité qui résume la situation est le tableau de valeurs de la fonction linéaire associée.

NOTION MATH SOUS-JACENTE : fonction linéaire
CONTEXTE : Situation de proportionnalité

Si 3 bonbons valent 2,46 € …
15 bonbons valent 1…

Le taxi roule à vitesse … il lui faut 3 minutes pour fair… s il lui faudra 15 minu… 12,30 km.

Si 3 cm … représentent 2,46 km dans la réal… 5 cm sur la carte représentent …,30 km dans la réalité.

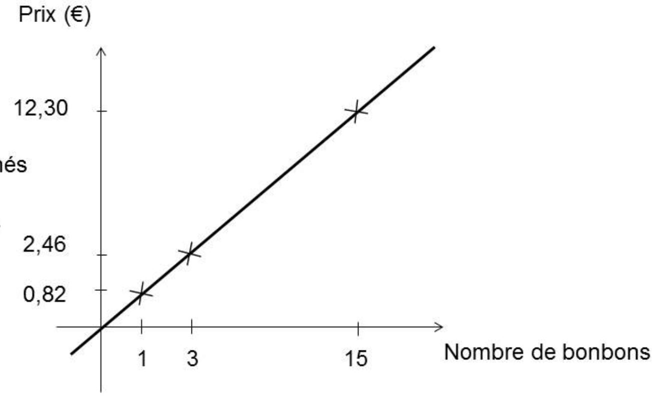
fonction linéaire sous jacente à ces situations
$F(X) = 0{,}82 \times X$

Cadre fonctionnel et cadre graphique

Nombre de bonbons	3	15	1
Prix à payer	2,46	12,30	0,82

$\times 0,82$

Les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine…



Sachant que 4 bonbons valent 2 euros, combien valent 8 bonbons?

rapport interne simple
rapport externe simple

Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros, combien valent 8 bonbons?

→ Utilisation des propriétés de linéarité

rapport interne simple
rapport externe complexe

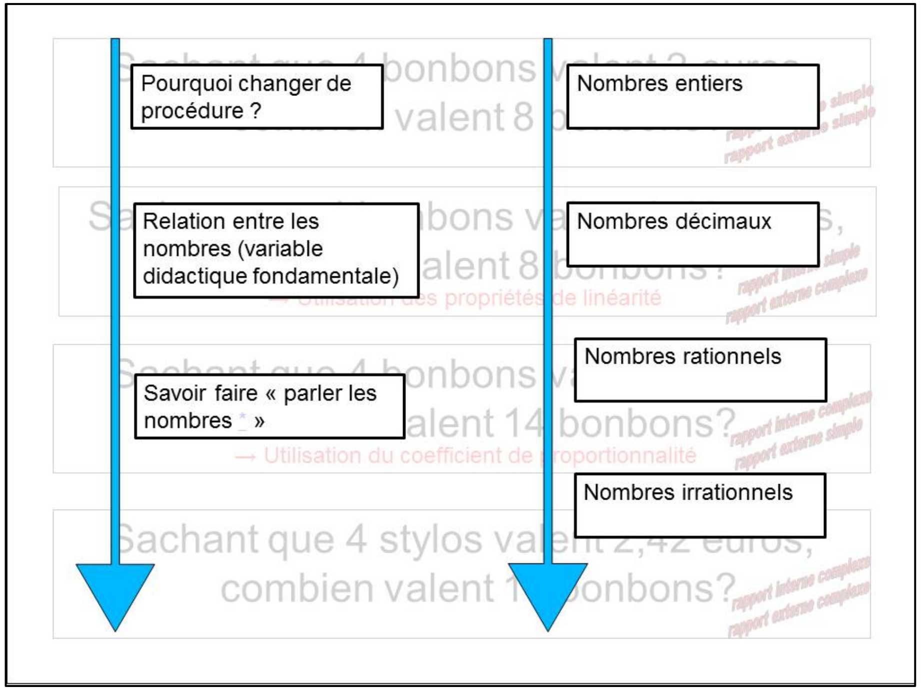
Sachant que 4 bonbons valent 2 euros, combien valent 14 bonbons?

→ Utilisation du coefficient de proportionnalité

rapport interne complexe
rapport externe simple

Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros, combien valent 14 bonbons?

rapport interne complexe
rapport externe complexe


Pourquoi changer de procédure ?
Relation entre les nombres (variable didactique fondamentale)
Savoir faire « parler les nombres » »
Nombres entiers
Nombres décimaux
Nombres rationnels
Nombres irrationnels

Vendus à l'unité
Au même tarif

Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros, combien valent 14 bonbons?

Introduction d'un troisième couple de données

Repérer des régularités
Tester des hypothèses de modèle
Diversifier les procédures

Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros et que 6 bonbons valent 3,63 euros, combien valent 14 bonbons?

II - Autour de la proportionnalité

1- Multiplications et divisions

- La multiplication

Exemple 7 x 15

Nombre de parts	1	7
valeur	15	?

« Un paquet contient 15 bonbons, combien de bonbons dans 7 paquets? »

1- Multiplications et divisions

- Les divisions

Exemple 15 : 9

Nombre de parts	1	9
valeur	?	15

(division – partition : recherche de la valeur d'une part)

« 9 tartelettes valent 15 euros, combien vaut une tartelette? »

1- Multiplications et divisions

- Les divisions

Exemple 15 : 9

Nombre de parts	?	1
valeur	15	9

(division – quotition : recherche du nombre de parts)

« 1 kg de figues vaut 9 euros, quelle masse de figues pour 15 euros ? »

1- Multiplications et divisions

Les divisions (partition et quotition) dépendent du contexte de l'exercice proposé.

Les divisions partition sont généralement mieux réussies que les divisions quotition.

Une explication :

Dans la division partition on cherche une grandeur quotient généralement identifiable (ex : on divise « des € par des tartelettes » pour trouver des €/tartelette)…alors que dans la division quotition l'équation aux unités est complexe (ex : on divise des € par des €/kg pour trouver des kg) ce qui est plus difficile à exprimer.

2- Les changements d'unités

Attention : cm², dm², m²…cL, dL, L… relève plus de la numération décimale que de la proportionnalité (le coefficient de proportionnalité est 10, 100, 1000…) → lien avec les fractions décimales

Changements d'unités :
- le change de monnaies (euro / dollars…)
- le changement d'unités de mesures internationales

<u>3- Taux de pourcentages</u>

Un pourcentage est l'expression d'une proportion pour cent unités.

Système efficace pour comparer des proportions :

Dans la classe de Lisette il y a 27 élèves dont 13 filles.
Dans celle d'Alban il y a 24 élèves dont 12 filles.

Dans quelle classe y a-t-il le plus de filles?
(additif : 13>12)

Dans quelle classe les filles sont-elles le plus représentées ?
(multiplicatif : 48% contre 50%)


Savoir-faire
J'apprends à...
Appliquer un taux de pourcentage
ENONCÉ Un centre d'équitation compte 250 licenciés. Il est composé de 82,4 % de femmes.
1) Quel est le pourcentage d'hommes licenciés de ce centre ?
2) Calculer le nombre de licenciés hommes dans ce centre.

Phare, cycle 3

Pour 100 licenciés, il y a « 82,4 femmes ».
Pour 50 licenciés, il y a « 41,2 femmes ».
Pour 250 licenciés, il y a 82,4 + 82,4 + 41,2 = 206 femmes.

Spécificité :
1- Attention au sens (82,4 femmes…?)
2- Symbole %
3- Ecritures différentes ($\frac{82,4}{100}$; 82,4%, 0,84)
4- Modèle additif et multiplicatif en interaction

4- Vitesse constante

$$d = v \times t$$

dans cette expression, la vitesse « v » constante apparaît comme le coefficient de proportionnalité qui lie distance « d » et durée « t ».

Exemple : Un train roule à vitesse constante de 120km/h pendant 2h30, quelle distance a-t-il parcourue ?

120 km en une heure donc 60 km en une demi heure ainsi 120 + 120 + 60 = 300 km en deux heures et demie.

5- Les échelles

Il y a plusieurs types d'échelles sur les cartes et plans mais tous donnent une relation de proportionnalité entre les distances réelles et les distances représentées

$$\text{Echelle} = \frac{\text{Distance sur le plan}}{\text{Distance réelle}}$$

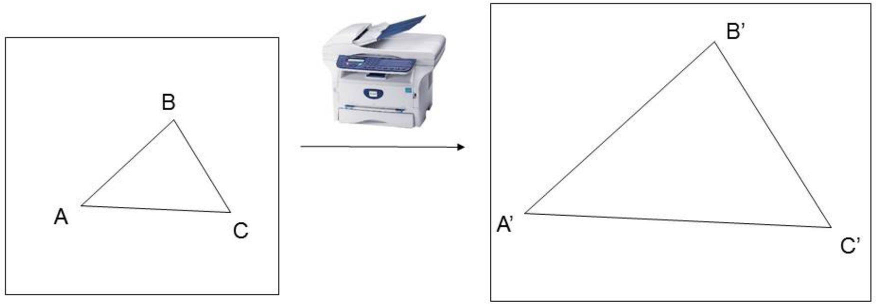
Les distances sont exprimées dans la même unité!

Exemple :
Une carte de randonnée IGN est à l'échelle $\frac{1}{25000}$. Cela signifie que 1 cm sur la carte correspond à 25000 cm dans la réalité.

Remarque :
Attention l'échelle « un dixième » considère la fraction décimale sous son aspect opérateur (et pas division partage ou division quotient).

6- Proportionnalité en géométrie

Agrandissement – réduction



D'autres applications en géométrie …

- Chaque élève trace un cercle puis en mesure le diamètre et le périmètre… π
- Chaque élève trace un carré puis en mesure le côté et la diagonale… $\sqrt{2}$

III – Résolution de problèmes de proportionnalité

1- Choix d’une situation de proportionnalité

Mathématiques concrètes…

…une recette de pâte à crêpes ?

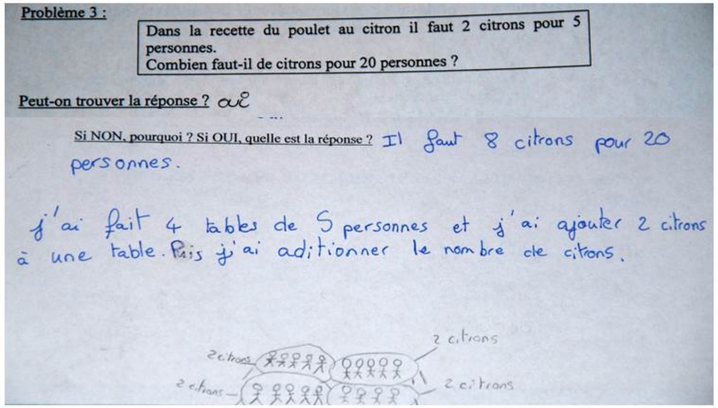
1- Choix d’une situation de proportionnalité

→ Difficulté du rapport entre réalité et modèle

ATTENTION aux implicites des situations dites « concrètes ». Lorsque l’on fait des maths, on se place généralement dans un cadre idéal que l’on doit expliciter (régulièrement) !

2- Procédures de résolution de problème de proportionnalité

Procédure experte ou non ?



Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

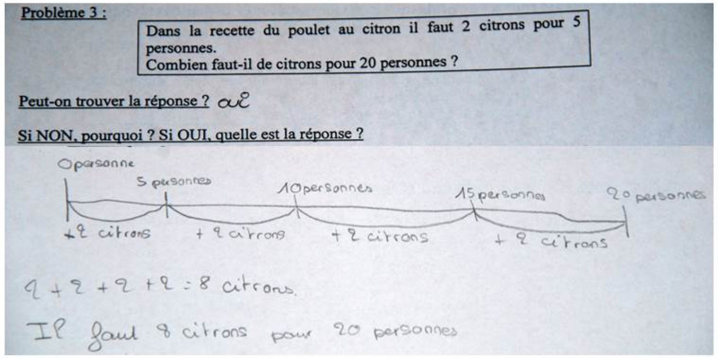
Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ? Il faut 8 citrons pour 20 personnes.

j'ai fait 4 tables de 5 personnes et j'ai ajouter 2 citrons à une table. Puis j'ai aditionner le nombre de citrons.

Propriété additive de la linéarité

Procédure experte ou non ?



Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

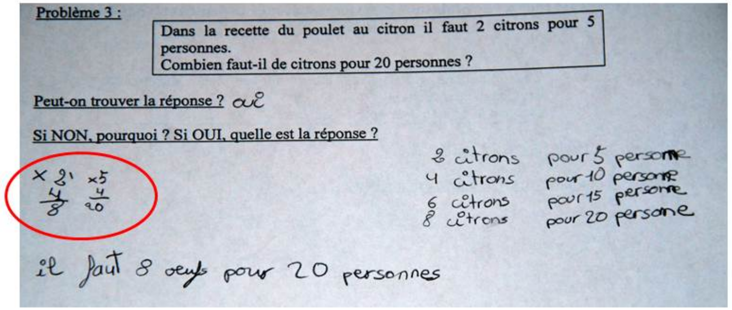
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

2 + 2 + 2 + 2 = 8 citrons.

Il faut 8 citrons pour 20 personnes

Propriété additive de la linéarité

Procédure experte ou non ?


Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

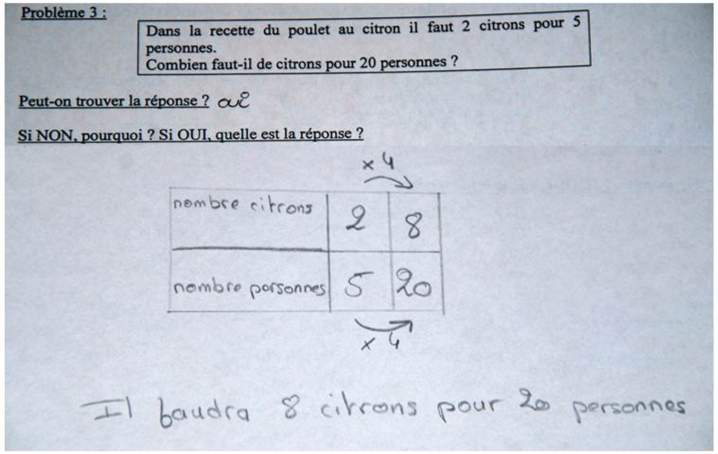
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

2 citrons pour 5 persone
4 citrons pour 10 persone
6 citrons pour 15 persone
8 citrons pour 20 persone

il faut 8 oeufs pour 20 personnes

Procédure mixte :
Propriété additive / multiplicative de la linéarité

Procédure experte ou non ?


Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

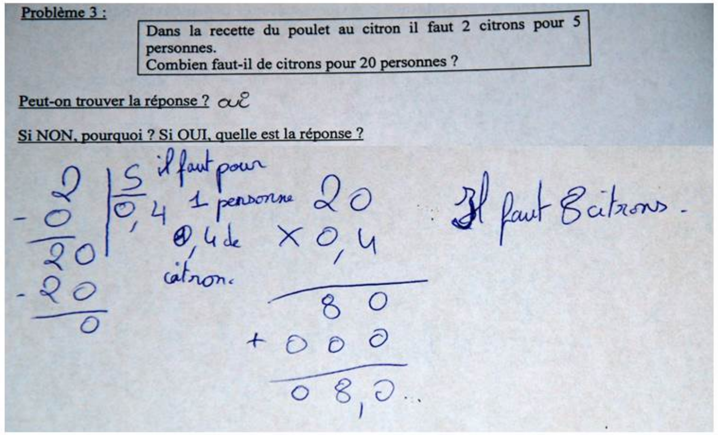
nombre citrons	2	8
nombre personnes	5	20

× 4

Il faudra 8 citrons pour 20 personnes

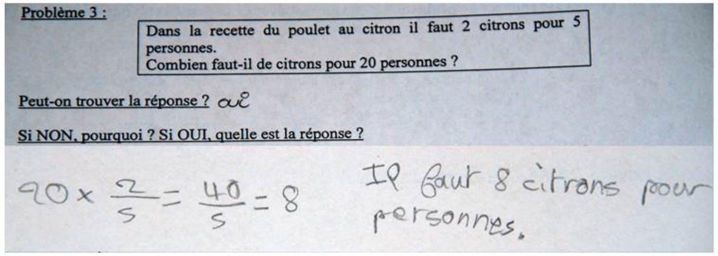
Propriété multiplicative de la linéarité

Procédure experte ou non ?



Retour à l'unité

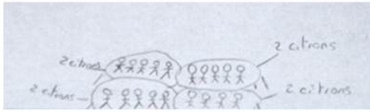
Procédure experte ou non ?

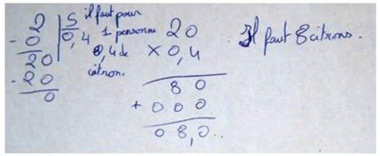


Passage par l'unité ?
Utilisation du coefficient de proportionnalité ?
Produit en croix?

Attention : Il peut être impossible pour l'enseignant de reconnaitre la stratégie utilisée par l'élève si la procédure est uniquement numérique. Le passage à l'oral pour expliciter une procédure est important. Il s'agit de mettre des mots sur les actes et d'expliciter les données numériques manipulées avec les unités (« la qualification », C. Houdement).

Procédure experte ou **la plus adaptée**?





L'objectif n'est pas de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir (…)

(…) la comparaison de différentes procédures doit permettre aux élèves d'acquérir ces différentes procédures et de prendre conscience qu'en fonction des nombres en jeu dans un problème, certaines sont plus efficaces que d'autres (…)

3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.
On connait la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Début CM1

Linéarité somme et différence

Quelle est la masse de 8 billes ? de 2 billes ?

3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.
On connait la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Fin CM1

Linéarité somme / différence / double et mixte (facile à identifier)

Quelle est la masse de 6 billes ? de 10 billes ?

de 13 billes ? de 7 billes ?

3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.
On connait la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Début CM2

linéarité somme / différence / multiple / diviseur / mixte

Quelle est la masse de 21 billes ? de 28 billes ?

de 500 billes ? de 250 billes ? 125 billes ?

3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.
On connait la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Fin CM2

linéarité et passage à l'unité

Quelle est la masse de 20 billes ? de 21 billes ?

de 1 bille ? de 87 billes ?

3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.
On connait la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Début 6°

linéarité / passage à l'unité et coefficient de proportionnalité

A l'aide du tableur, donner la masse de tous les paquets de moins de 180 billes.

3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.
On connait la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

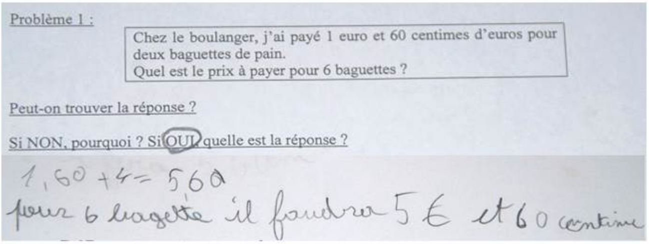
Fin 6°

linéarité / passage à l'unité / coefficient de proportionnalité / tableau de proportionnalité

Résumer sous forme de tableau la situation de la masse des billes en sachant faire apparaitre les opérations de linéarité et le coefficient de proportionnalité.

4- Erreurs classiques

Persistance du modèle additif


Problème 1 :

Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain.
Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

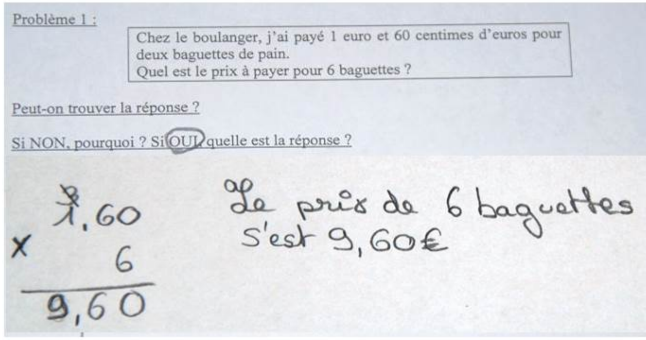
1,60 + 4 = 5,60
pour 6 bagette il faudra 5 € et 60 centime

Pour 4 baguettes de PLUS on paye 4 euros de PLUS !

→ Introduction d'un troisième couple de données.

4- Erreurs classiques

Non prise en compte du passage à l'unité


Problème 1 :

Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain.
Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

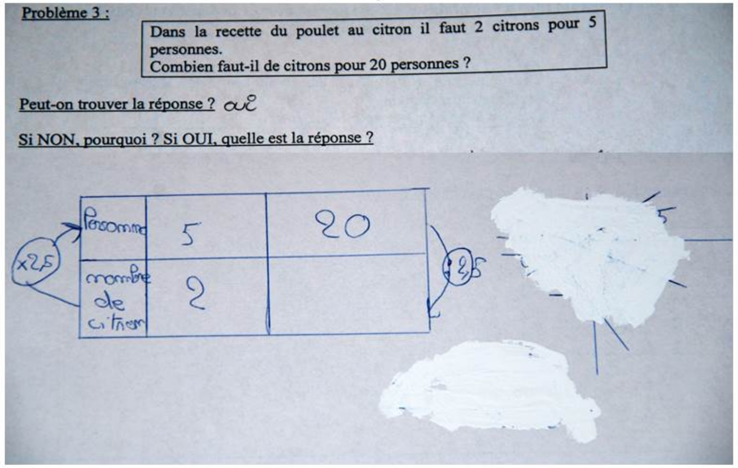
$$\begin{array}{r} 1,60 \\ \times \quad 6 \\ \hline 9,60 \end{array}$$

Le prix de 6 baguettes s'est 9,60€

→ Dans l'énoncé : « deux baguettes » ou « 2 baguettes » ?

4- Erreurs classiques

Choix de la procédure



Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

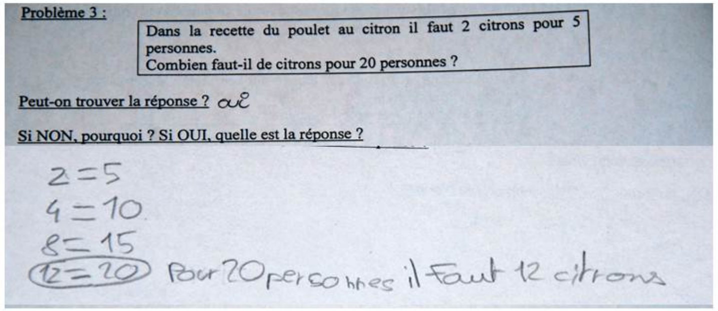
Personnes	5	20
nombre de citron	2	

x2,5

Attention à ne pas « formaliser » trop tôt !

4- Erreurs classiques

Mauvaise utilisation du signe « = »



Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

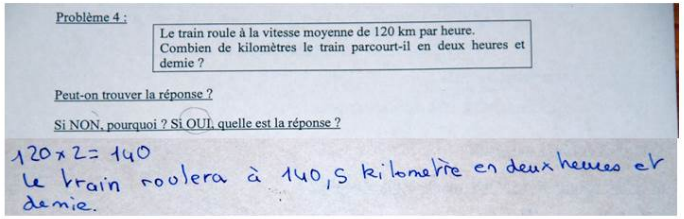
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

2=5
4=10
8=15
12=20 Pour 20 personnes il faut 12 citrons

→ Voir le document « calcul en ligne au cycle 3 » pour le statut du signe « = »

4- Erreurs classiques

Difficulté à travailler avec les décimaux


Problème 4 :

Le train roule à la vitesse moyenne de 120 km par heure.
Combien de kilomètres le train parcourt-il en deux heures et demie ?

Peut-on trouver la réponse ?

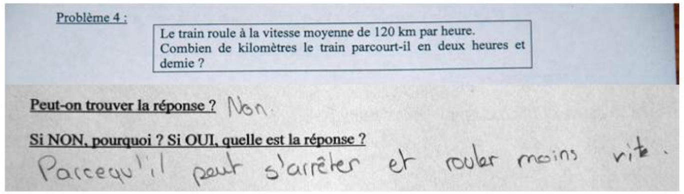
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

120 x 2 = 140
le train roulera à 140,5 kilometre en deux heures et demie.

→ L'élève se sécurise avec le modèle additif dès que la nature des nombres utilisés se complique ! L'oral doit permettre de prévenir ce genre d'erreur.

4- Erreurs classiques

Confusion entre « vitesse instantanée » et « vitesse moyenne »


Problème 4 :

Le train roule à la vitesse moyenne de 120 km par heure.
Combien de kilomètres le train parcourt-il en deux heures et demie ?

Peut-on trouver la réponse ? Non.

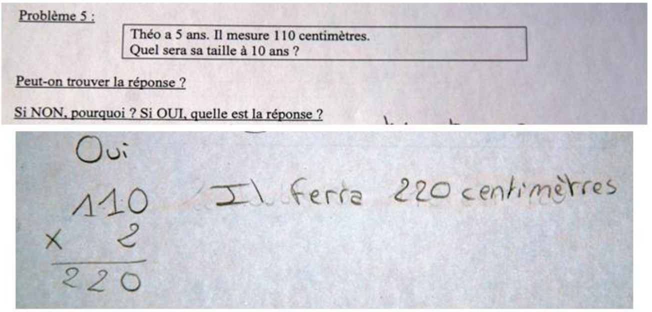
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

Parcequ'il peut s'arrêter et rouler moins vite.

→ notion de vitesse « constante »

4- Erreurs classiques

Effet de contrat : les énoncés typés « proportionnalité »


Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

Oui

110
× 2
220

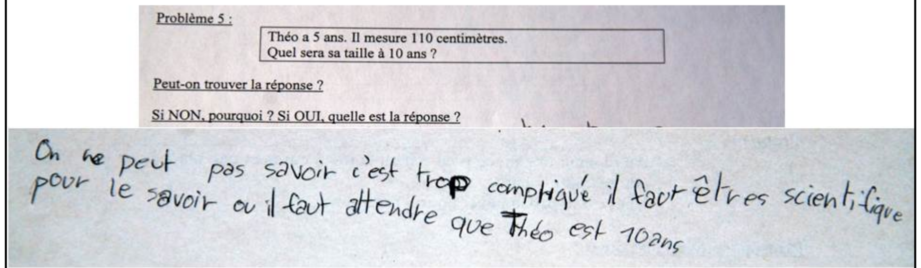
Il ferra 220 centimètres

→ Confronter proportionnalité, non proportionnalité et proportionnalité « partielle »

→ Attention à la structure des énoncés

4- Erreurs classiques

Enoncé « concret »…réponse « concrète »


Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

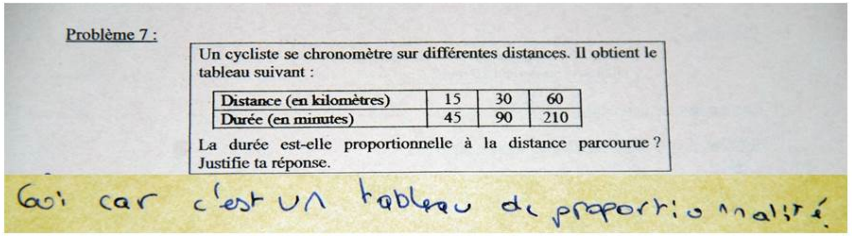
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

On ne peut pas savoir c'est trop compliqué il faut êtres scientifique pour le savoir ou il faut attendre que Théo est 10ans

→ Argumentation qui sort du cadre mathématique souhaité (problème de la modélisation)

4- Erreurs classiques

Un tableau ne fait pas la proportionnalité.



Problème 7 :

Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

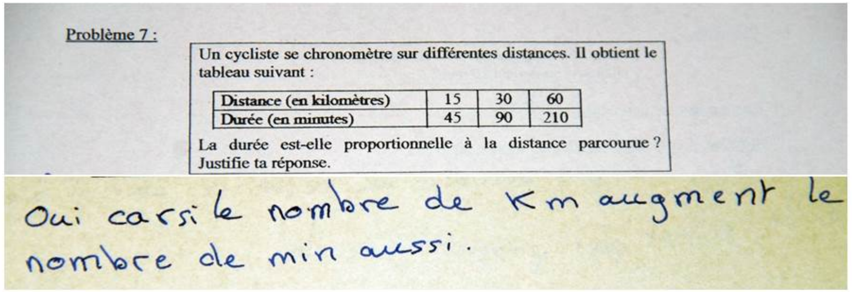
Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ? Justifie ta réponse.

Oui car c'est un tableau de proportionnalité.

4- Erreurs classiques

Confusion entre « croissance » et « proportionnalité ».



Problème 7 :

Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ? Justifie ta réponse.

Oui car si le nombre de Km augment le nombre de min aussi.

→ confrontation avec des cadres du type âge – taille

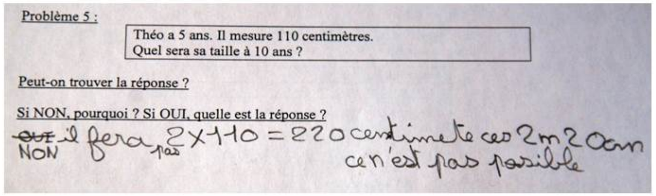
IV- Proportionnalité et modélisation

1- Reconnaissance d'une situation de proportionnalité

Reconnaître une situation de proportionnalité et le justifier est déjà tout un problème…il est plus facile de justifier qu'une situation n'est pas de proportionnalité !

On reconnait des situations de proportionnalité par confrontation à des situations de non-proportionnalité.

Exemple


Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

~~OUI~~ NON il fera pas 2x110 = 220 centimetres ces 2m20cm
ce n'est pas posible

Une situation qui n'est pas modélisable avec la proportionnalité devrait être justifiée en insistant sur l'oral (raisonnement par l'absurde).

Si cette situation était « de proportionnalité » quelle serait la taille de Théo à 50 ans ? À sa naissance ?

2- Résolution de problème…et proportionnalité

Chercher

Modéliser

Représenter

Raisonner

Calculer

Communiquer

+ Manipuler (tout en sachant que faire des mathématiques c'est arriver à se passer de la manipulation)

Un problème…des procédures

« Quelle est la masse de 80 billes identiques ? »

Nous souhaitons savoir la masse de	prix	Choix (mettre une croix)
16 billes	5 €	
24 billes	4 €	
32 billes	2 €	
33 billes	2 €	
40 billes	10 €	
47 billes	4 €	
48 billes	4 €	
79 billes	1 €	

Un problème de modélisation

« La botte du Géant »

Quelle est la taille du Géant ?

Chercher ☑
Modéliser ☑
Raisonner ☑
Calculer ☑
Communiquer ☑

Le pied du bonnhome fait 1 cm et le pied du géant 10 cm alors on peux dire que le bonnhomme est 10 fois plus petit et que le géant est 10 fois plus grand que le bonnhomme. (180 cm x 10 cm = 1800 cm)

Le géant a la même proportion que nous.

180 cm est la taille moyenne d'un homme.

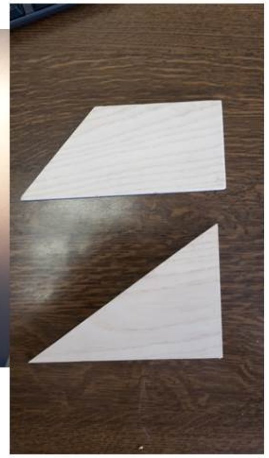
Le géant mesure 18 m

Un problème de recherche d’indice

« Capacité du réservoir ? »

Un problème de géométrie / technologie

« Dessine l’ombre ? »

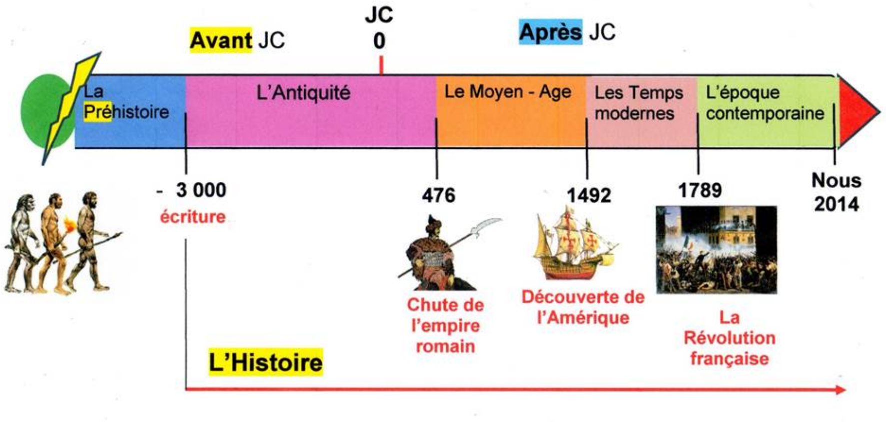


Estimer un grand nombre

« Combien de coquillettes dans un paquet de 500 g ? »

Histoire et frise

« Longueur d'une frise ? »



Conclusion

Quelques points essentiels pour l'enseignement de la proportionnalité :

- Notion à développer sur le long terme (cycle 2 – cycle 3 – cycle 4)
- Progressivité dans les procédures attendues (linéarité puis passage à l'unité puis coefficient de proportionnalité)
- Jouer sur les variables « numériques » (taille des nombres / rapport interne / rapport externe / nature des nombres)
- Insister sur l'oral (explicitation et confrontation)
- Multiplier les contextes (vie courante et problèmes mathématiques)
- Jouer sur l'interdisciplinarité (EPS, géographie, histoire, sciences, technologie…)
- Confronter proportionnalité, non proportionnalité et proportionnalité « partielle »
- Impliquer les élèves (vie de tous les jours)
- Résoudre des problèmes « concrets »
- Introduire les tableaux lorsque la notion est maitrisée

Bibliographie succincte

- Boisnard D, Houdebine J, Julo J, Kerboeuf MP, Merri M, *La proportionnalité et ses problèmes*, Hachette Education, 1994.
- Bonnet N, *La proportionnalité sans problème*, SCEREN, 2011.
- Comin E, Des graines et des souris, *Grand N*, n°72, 2003.
- ERMEL, *Apprentissages numériques CM1 et CM2*, Hatier Pédagogie.
- Hersant M, La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui, *Repère – IREM*, n°59, 2005.
- Houdement C, Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques à l'école primaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol 16. p 67-96, 2011.
- Levain JP, Le Borgne P, Simard A, Territoires et conceptualisation de la proportionnalité, *L'orientation scolaire et professionnelle*, 2009.
- René de Cotret S, *Étude de l'influence des variables indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez des élèves de 13-14 ans*, Thèse, 1991.
- Ressource pour les classes du collège, proportionnalité, Eduscol, 2005.
- Simard A, Reconnaissance de situations de proportionnalité, *Grand N*, n°90, 2012.
- Simard ., Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique, *Petit x*, n°89, 2012.
- Simard A, Proportionnalité en CM2 – 6°, *Petit x*, n°90, 2012