ACADÉMIE DE NANCY-METZ
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2024

Académie de Nancy-Metz

Mercredi 20 mars 2024 (matin)
Seconde partie - Exercices académiques
Élèves suivant la spécialité « mathématiques »

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »).
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.
Les élèves qui travaillent en groupes doivent s'organiser pour rendre une copie commune au groupe.

21 à la suite

Quelques propriétés

Si n est un entier naturel non nul, on note $s(n)$ la somme de ses chiffres (en base 10).

Par exemple, $s(29) = 2 + 9 = 11$. On dit qu'un nombre n est de Niven s'il est divisible par $s(n)$. Par exemple, 110 est un nombre de Niven puisque $s(110) = 2$ et 2 divise 110. Vous justifierez toutes vos réponses.

1. Dire quels sont les nombres de Niven parmi les nombres suivants : $27, 30, 100$ et 253.
2. Quel est le plus petit entier qui n'est pas de Niven ?
3. a) Peut-on dire que la somme de deux nombres de Niven est encore un nombre de Niven ?
   b) Peut-on dire que le produit de deux nombres de Niven est encore un nombre de Niven ?
4. a) Soit n un nombre de Niven. Montrer que n multiplié par une puissance entière positive de 10 est encore un nombre de Niven.
   b) Montrer que l'ensemble des nombres de Niven est infini.
   c) Montrer que l'ensemble des nombres de Niven pairs est infini.
   d) Montrer que l'ensemble des nombres de Niven impairs est infini.

Un peu de Python

5. On suppose qu'on dispose d'une fonction Python `nombre_vers_liste` qui prend en argument un entier naturel n (écrit en base 10) et qui renvoie la liste de ses chiffres (par exemple, `nombre_vers_liste (421)` renvoie `[4,2,1]`). Écrire une fonction Python `Niven` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie `True` si le nombre n est de Niven et `False` sinon. On rappelle que `n%k` renvoie le reste de la division euclidienne de n par k.
6. Écrire une fonction Python qui affiche les nombres de Niven parmi les entiers inférieurs ou égaux à 100.
7. Écrire une fonction Python qui affiche toutes les séquences de trois nombres entiers consécutifs inférieurs ou égaux à 100 qui sont de Niven.

Nombres de Niven consécutifs

L'objectif de cette partie est de démontrer qu'il n'existe pas de séquence de 21 nombres de Niven consécutifs.
Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

8. a) Soit n un nombre impair de Niven. Le nombre $s(n)$ est-il pair ou impair ?
   b) La différence de deux nombres impairs est-elle paire ou impaire ?
   c) Soit i un entier entre 0 et 8 ; on note : $p = 100a + 10i + 9$. Calculer $s(p) - s(p + 2)$ et en déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas tous les deux être de Niven.

9. On suppose que les dix nombres $10a, 10a + 1, 10a + 2, \dots, 10a + 9$ sont tous des nombres de Niven.
   a) Montrer qu'il existe un entier j compris entre 0 et 9 tel que 10 divise $s(a) + j$, puis que 10 divise $10a + j$.
   b) En déduire que 10 divise j.
   c) Montrer que 10 divise $s(a)$.

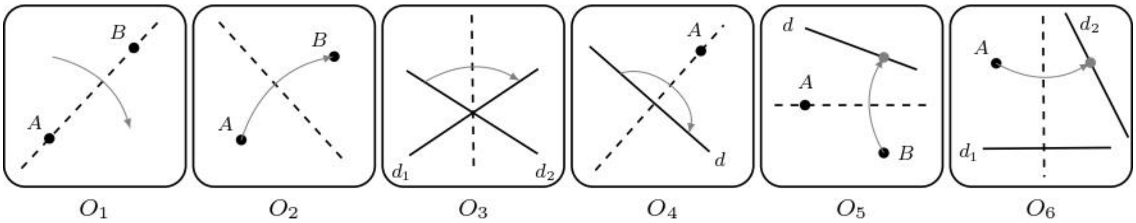
10. L'objectif de cette question est de montrer qu'il n'existe pas onze nombres de la forme : $100b, 100b + 1, 100b + 2$, ..., $100b + 10$ qui soient tous des nombres de Niven. Pour cela, on veut raisonner par l'absurde et on suppose que $100b, 100b + 1, 100b + 2, \dots, 100b + 10$ sont tous de Niven.
    a) Avec la question précédente, montrer que $s(b) \geqslant 10$.
    b) Montrer que $s(b) + 1$ divise $100b + 1$ et $s(b) + 1$ divise $100b + 10$, puis en déduire que que $s(b) \leqslant 8$.
    c) Conclure.

11. Soit i, j deux entiers entre 0 et 9 inclus. On suppose que $100a + 10i + j$ est le premier terme d'une suite de 20 nombres de Niven consécutifs.
    a) Prouver que i ne peut pas être différent de 9.
    b) Prouver que j ne peut pas être différent de 0.

12. Montrer qu'il n'existe pas de suite de 21 nombres consécutifs de Niven.

C'est plié

Dans cet exercice on s'intéresse à la géométrie des origamis, c'est-à-dire la géométrie par **pliages** : on n'utilise ni règle, ni compas ni équerre ! À chaque étape, on peut plier une feuille en suivant l'un des **procédés** suivants :



Dans ces figures, les plis (ou droites) obtenus sont en pointillés. Voici une description de trois procédés :

O_1 : *Étant donnés deux points A et B on peut plier selon la droite (AB).*

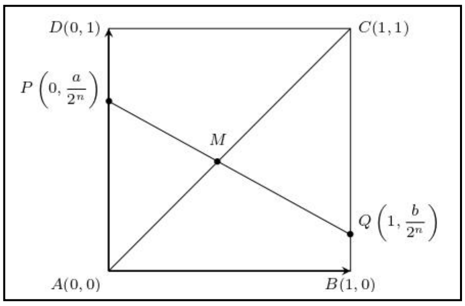
O_2 : *Étant donnés deux points A et B, on peut plier pour envoyer A sur B.*

O_4 : *Étant donnés un point A et une droite d, on peut créer un pli passant par A et envoyant la droite d sur elle-même.*

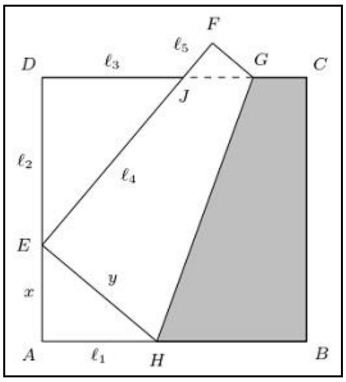
1. Décrire les procédés O_5, O_6 et O_3.
2. Dans O_3, si les droites d_1 et d_2 sont sécantes, de combien de façons peut-on plier pour les superposer l'une sur l'autre ? Et si elles sont parallèles ?

On part d'une feuille carrée de côté 1 : quatre plis (les bords) et quatre points (les sommets). On dit d'un pli qu'il est *construit* lorsqu'on l'a obtenu à l'aide d'un ou des procédés précédents et des éléments (segments ou points) déjà construits. On dit d'un point qu'il est *construit* s'il se trouve à l'intersection de deux plis *construits*. Enfin, un nombre est dit *constructible*, s'il est la longueur d'un segment qu'on peut construire.

3. Justifier que $\frac{1}{2}$ est *constructible* : préciser quel(s) procédé(s) utilise-t-on parmi les procédés O_1, O_2, . . .
4. Donner sans justification le plus grand nombre *constructible* (dans le carré). Comment peut-on le construire ?
5. Expliquer comment construire le nombre $\frac{11}{16}$ et combien d'étapes sont nécessaires.
6. Soit n un entier naturel non nul. Décrire en langage naturel un algorithme permettant de construire toute fraction de la forme $\frac{a}{2^n}$ avec a entier inférieur à 2^n en n étapes.
7. a) On considère deux entiers a et b strictement inférieurs à 2^n. Dans la figure ci-contre, on a construit les fractions $\frac{a}{2^n}$ et $\frac{b}{2^n}$.
   En se plaçant dans le repère indiqué, calculer les coordonnées du point d'intersection M des deux plis (AC) et (PQ).
   b) En déduire une construction de la fraction $\frac{a}{2^n+a-b}$; en précisant les étapes et les procédés utilisés.
   c) Combien faut-il d'étapes pour construire la fraction $\frac{1}{5}$ avec cette méthode ? On inclura dans le décompte la construction de P et Q.



8. Dans la figure ci-dessous, on a choisi E sur $[AD]$ et on a plié le carré selon O_2 de sorte à superposer B sur E. Pour simplifier le raisonnement, on a laissé visible le carré avant pliage (partie grisée). $[GJ]$ est caché par la feuille repliée.



a) Que peut-on dire des longueurs HB et HE ? En déduire une expression de AH en fonction de y, où $y = EH$.

b) Que peut-on dire des angles de sommet E ?

c) Montrer que les triangles AHE, EDJ et GFJ sont semblables.

d) On note les longueurs AH, ED, DJ, EJ et JF respectivement par ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 et ℓ_5. Quatre de ces longueurs appartiennent à l'ensemble :

$$\left\{\frac{2x}{1+x}; \frac{1-x^2}{2}; 1-x; \frac{1+x^2}{1+x}; \frac{x(1-x)}{1+x}\right\} ; \text{ où } x = AE.$$

Sans justification associer chacune de ces longueurs à son expression.

e) Que peut-on dire du périmètre de DEJ ?

f) Ce pliage permet-il une construction de la fraction $\frac{1}{5}$ en moins d'étapes que précédemment ?