ACADÉMIE
DE NANCY-METZ
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Académie de Nancy-Metz

Mardi 9 mars 2022 (matin)
Seconde partie - Exercices académiques
Élèves suivant la spécialité « mathématiques »

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »).

Des consignes spécifiques liées au respect du protocole sanitaire en vigueur peuvent être rappelées.

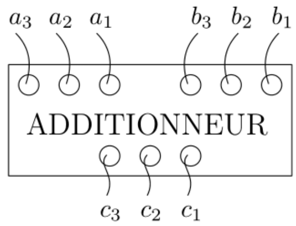
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Les élèves qui travaillent en groupes doivent s'organiser pour rendre une copie commune au groupe.

Fusée Thésée



Martine confectionne le processeur pour la nouvelle fusée Thésée 4. En particulier, le processeur doit effectuer des additions sur des entiers positifs et il n'a la place que pour 3 chiffres compris entre 0 et 9 pour représenter chaque entier. Dans tout le sujet, les variables a_1, a_2, a_3, ainsi que b_1, b_2, b_3 et c_1, c_2, c_3 sont des entiers compris entre 0 et 9.

I. Représentation petit-boutiste

Dans un premier temps, Martine opte pour une représentation *petit-boutiste* couramment utilisée en informatique. Un entier y est représenté avec le chiffre des unités en premier, puis le chiffre des dizaines et enfin le chiffre des centaines. Le triplet (a_1, a_2, a_3) représente ainsi l'entier $100 \times a_3 + 10 \times a_2 + a_1$.

1. Écrire les entiers représentés par les triplets $(1, 0, 2)$, $(9, 5, 0)$ et $(0, 1, 2)$.
2. Le résultat de l'addition de 2 entiers à 3 chiffres peut-il toujours s'écrire avec 3 chiffres ? Justifier la réponse.
3. Écrire un algorithme en python ou en langage naturel sous forme de fonction qui prend en entrée 6 entiers $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, et qui renvoie `True` si la somme des 2 entiers correspondants aux triplets (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) peut s'écrire avec 3 chiffres et `False` sinon.

Le lancement de la fusée Thésée 4 est un succès ! L'équipe de Martine travaille maintenant sur la prochaine fusée Thésée 5, qui est dix fois plus lourde. Malheureusement, les calculs de trajectoire de cette nouvelle fusée font intervenir de grands entiers qui ne sont pas représentables avec le processeur actuel.

II. Représentation virgule flottante

Martine a alors une idée pour développer un processeur qui fera des additions sur des entiers plus grands, tout en gardant une représentation avec 3 chiffres.
Le triplet (a_1, a_2, a_3) représentera à présent l'entier $(10 \times a_1 + a_2) \times 10^{a_3}$.
On appellera cette représentation la représentation *virgule flottante*.

1. Écrire les entiers représentés par les triplets $(1, 0, 2)$, $(9, 5, 0)$, $(0, 1, 2)$ et $(5, 4, 3)$.
2. Montrer qu'il existe un entier que l'on peut écrire en représentation *virgule flottante* avec 2 triplets différents.
3. Propriétés de la représentation *virgule flottante*.
   a) Quel est le plus grand entier M exprimable en représentation *virgule flottante* ? Justifier la réponse.
   b) Dire pour chacun des entiers 121, 12 000, 100 et 990 000 000 000, s'il peut s'écrire en représentation *virgule flottante*.
   c) Quel est le plus petit entier positif m qui ne peut pas s'exprimer en représentation *virgule flottante* ? Justifier la réponse.
   d) Combien d'entiers sont représentables en représentation *virgule flottante* ?
4. Expression d'un entier en représentation, *virgule flottante*.
   Étant donné un entier positif n, on appelle $T\ (n)$ le plus grand entier inférieur ou égal à n qui peut être représenté en *virgule flottante*.
   a) Que valent $T\ (11)$, $T\ (105)$ et $T\ (4\,210)$?
   b) Écrire en Python ou en langage naturel la fonction `tronquer(n)` qui prend en entrée un entier positif n et qui renvoie $T\ (n)$. On pourra utiliser les fonctions suivantes (n et k sont deux entiers non nuls).

`taille(n)` : nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10	`puissance(n,k)` : n à la puissance k
`quotient(n,k)` : quotient de la division euclidienne de n par k	`reste(n,k)` : reste de la division euclidienne de n par k

   c) Écrire en Python ou en langage naturel la fonction `representation(n)` qui prend en entrée un entier n qui peut s'écrire en représentation *virgule flottante*, et qui renvoie une liste de 3 chiffres le représentant. On pourra utiliser les fonctions `taille`, `puissance`, `quotient` et `reste` définies ci-dessus.

5. Écrire en Python ou en langage naturel un algorithme de la fonction `addition(a1,a2,a3,b1,b2,b3)` qui prend en entrée 6 entiers $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, tels que les triplets (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) donnent respectivement les représentations *virgule flottante* des entiers n et m, et qui renvoie une liste `[c1, c2, c3]` correspondant à la représentation *virgule flottante* de $T\ (n + m)$. Toutes les fonctions définies dans les questions précédentes pourront être utilisées.

Comment couper la pièce montée ?

Lors d'un mariage, 120 personnes sont présentes. Le dessert est constitué d'une tour de 20 gâteaux « circulaires » superposés, de rayon noté r, percés en leur centre par une broche verticale. Comme tout le monde ne souhaite pas la même taille de parts, on propose de couper les gâteaux en parts égales, certains en 3, certains en 6, certains en 12 et le reste en 7. Le but de ce sujet est de trouver un moyen de découper des morceaux de la taille demandée (on négligera les pertes dues au couteau).
Pour ce faire, nous connaissons le centre de chaque gâteau, et nous pouvons utiliser la broche comme règle non graduée (supposée assez grande pour toutes les situations décrites ci-dessous).

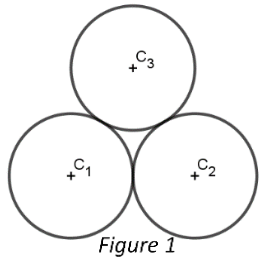


Figure 1

1. Démontrer qu'en plaçant 3 gâteaux, comme sur la *figure 1*, nous pouvons découper une part représentant un sixième d'un gâteau.
2. Comment, en représentant un quatrième gâteau sur la figure précédente, pouvons-nous faire une part d'un douzième ? Justifier la réponse.
3. On propose d'aligner trois gâteaux, juxtaposés, et de placer la broche pour qu'elle passe par le centre du premier gâteau et qu'elle soit tangente au troisième gâteau en un point nommé A, comme sur la *figure 2*.
   Les points I et J sont les points d'intersection entre la broche et le bord du deuxième gâteau. On note H le projeté orthogonal du point C_2 sur la droite (IJ).

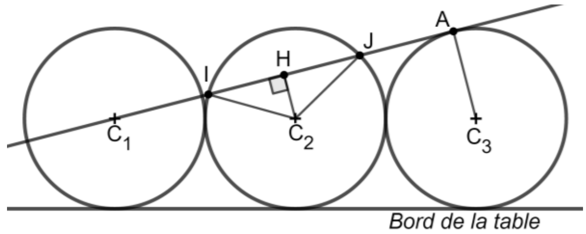


Figure 2

   a. Justifier que les droites (HC_2) et (AC_3) sont parallèles.
   b. Déterminer la longueur HC_2 en fonction de r.
   c. En déduire la valeur de $\cos(\widehat{IC_2H})$.
   d. En déduire que cette construction permet de couper une part égale à un tiers de gâteau.

4. Il reste à découper les gâteaux en 7 parts égales. On acceptera une imprécision inférieure à 1°. On propose d'aligner n gâteaux et de réitérer la construction utilisée à la question 3. La situation avec $n = 6$ est représentée par la *Figure 3* ci-dessous :

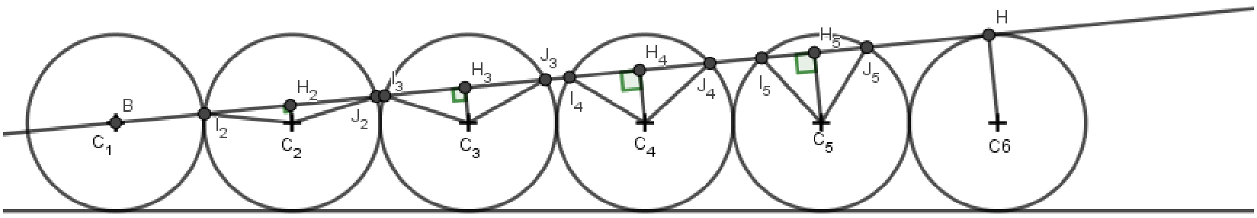


Figure 3

   C_1 est le centre du premier gâteau et C_n celui du dernier. Pour $1 < k < n$, on notera C_k le centre du gâteau situé à la $k-ième$ position, I_k et J_k les points d'intersection entre les bords de ce gâteau et la broche, et H_k le pied de la hauteur issue de C_k dans le triangle $I_kC_kJ_k$.

   a. Montrer que $\cos\left(\widehat{I_kC_kH_k}\right) = \frac{k-1}{n-1}$.
   b. Écrire un algorithme nommé `ChercherPart`, qui renvoie un couple (n, k), avec $1 < k < n \leq 20$, où :
      - n est un nombre de gâteaux à aligner ;
      - k est tel que la mesure de l'angle $\widehat{I_kC_kJ_k}$ est égale à $\frac{360°}{7}$ à 1° près.

5. L'algorithme a trouvé un couple (n, k). Quelles sont les valeurs possibles du produit nk parmi les trois valeurs : 91, 105 et 110 ? Justifier la réponse.
6. On rappelle qu'on a coupé les 20 gâteaux en 120 parts. On note a le nombre de gâteaux coupés en 6, b le nombre de gâteaux coupés en 12 et c le nombre de gâteaux coupés en 7. Sachant qu'il y a 11 gâteaux coupés en 3, quelles sont les valeurs non nulles possibles de a, b et c ?