Mesure et incertitudes

Nancy février 2013

ministère éducation nationale

éduSCOL

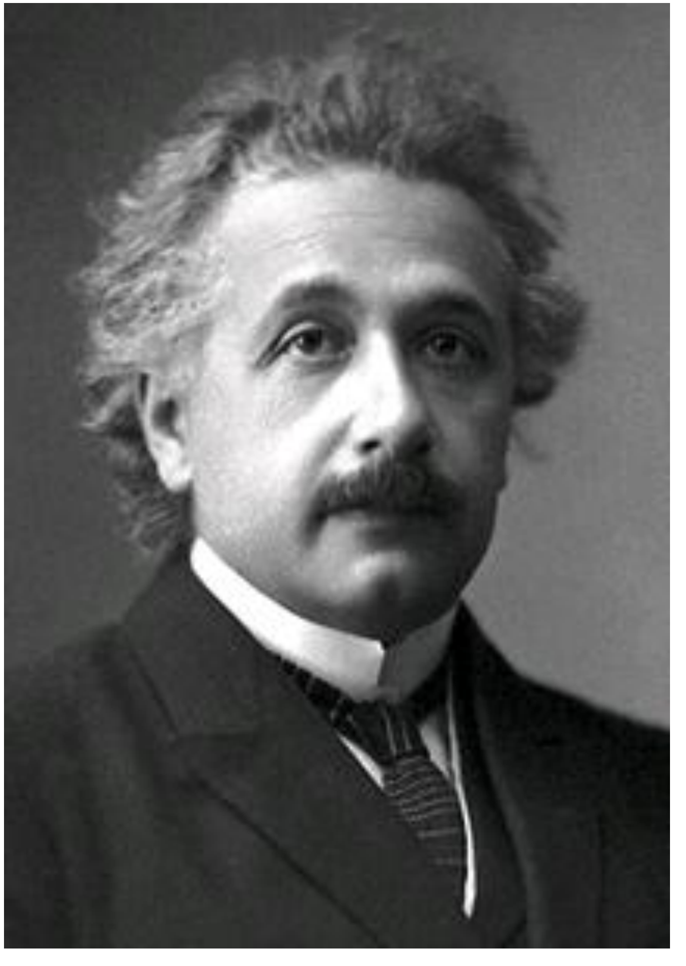
Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour le cycle terminal
général et technologique

Mesure et incertitudes

juin 2012

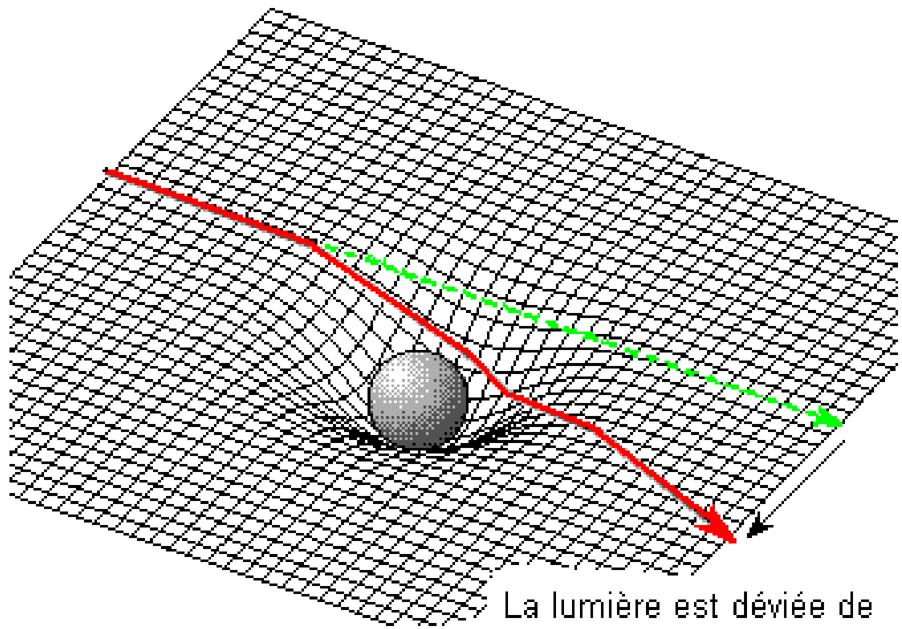
Des mises en lumière



d = 0

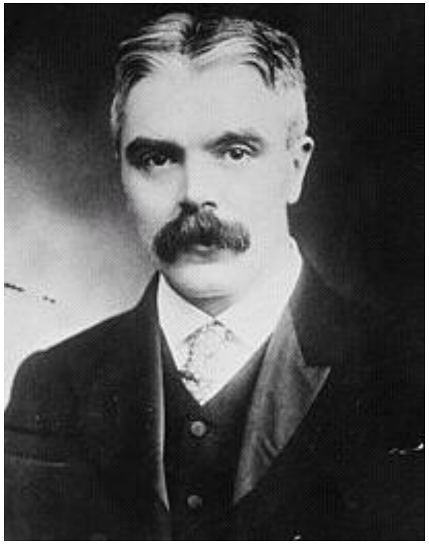
d = 0,9”

d = 1,8 ”

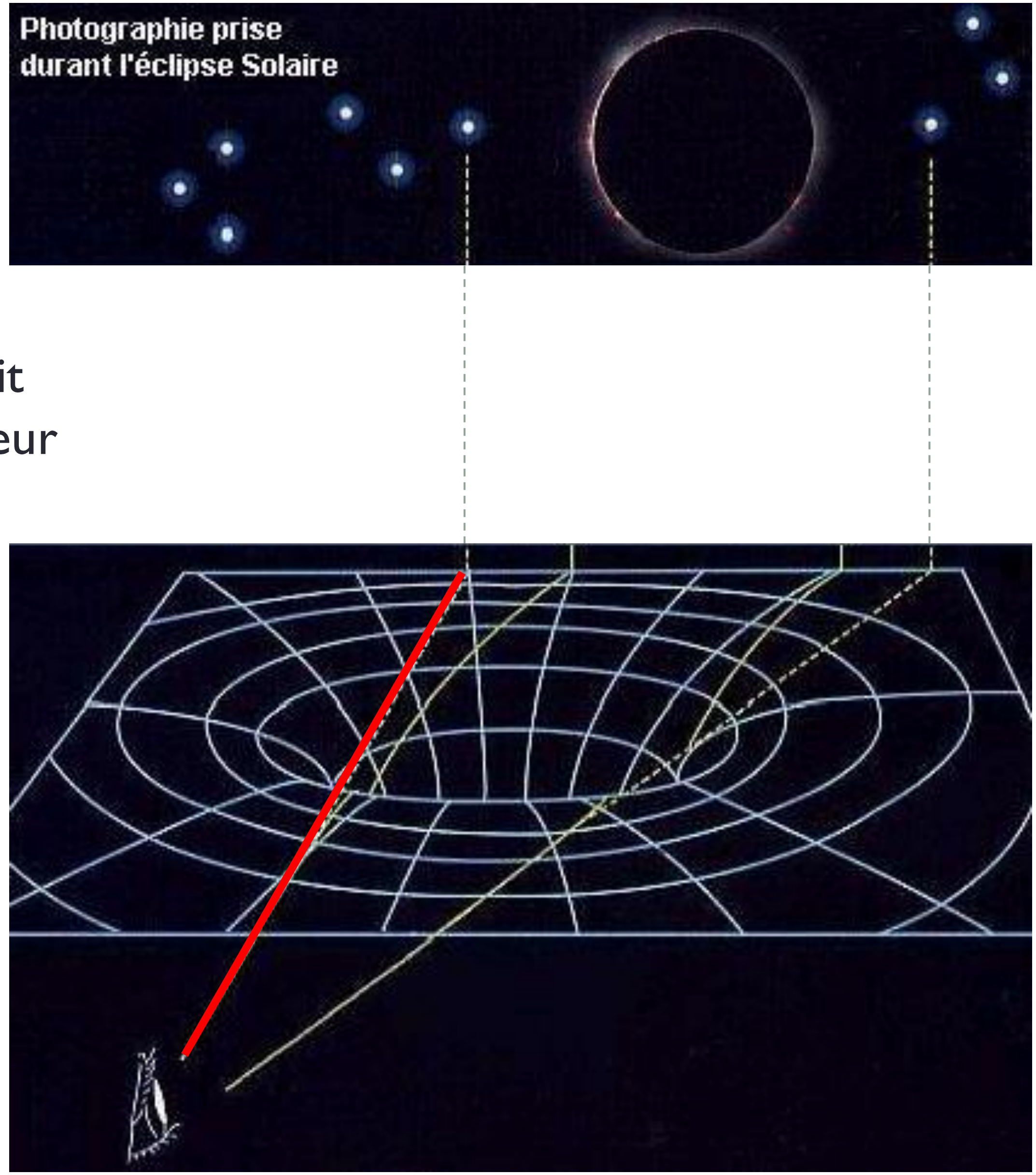


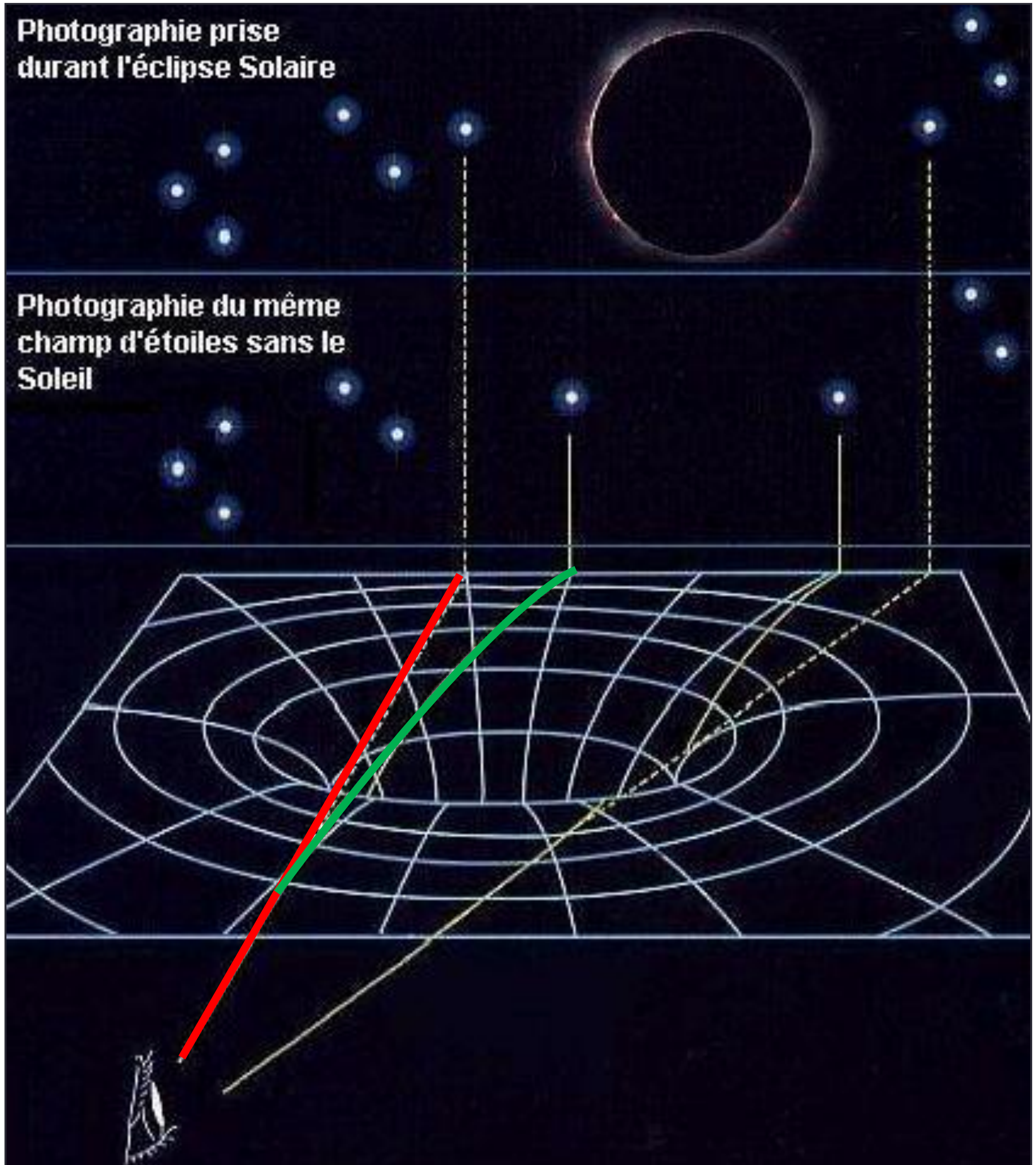
Arthur Stanley Eddington

Frank Watson Dyson



Ce que voit l'observateur




Photographie prise
durant l'éclipse Solaire
Photographie du même
champ d'étoiles sans le
Soleil

Un siècle plus tard

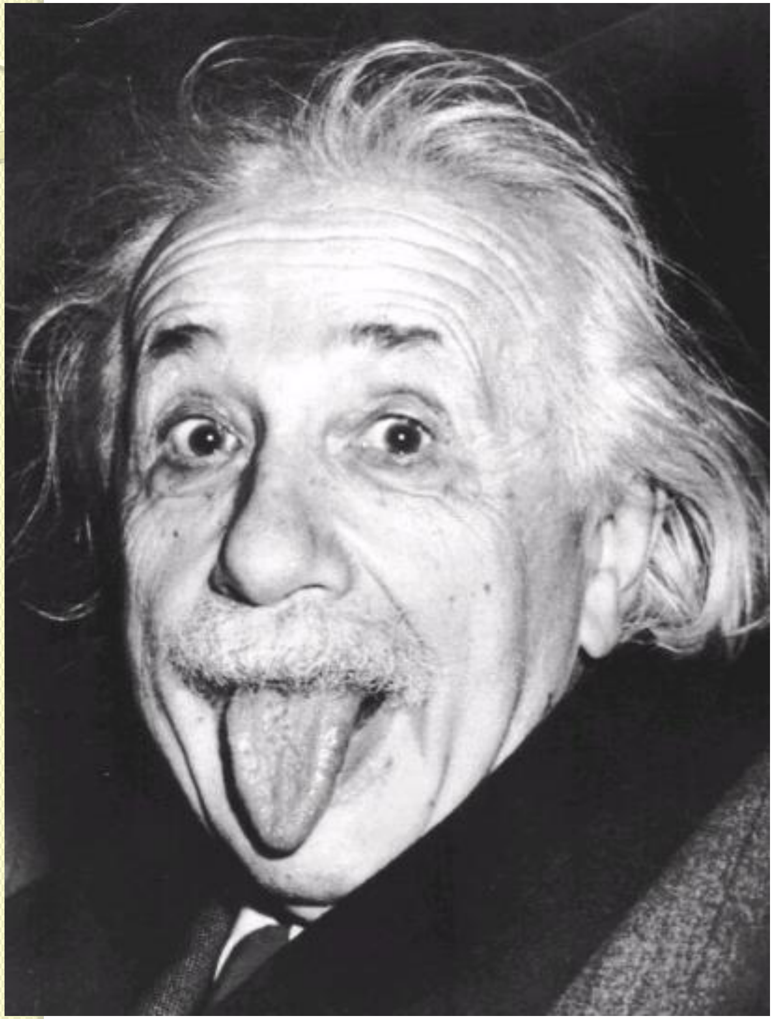
23 septembre 2011

Des neutrinos plus rapides que la lumière

Des neutrinos circulant entre Genève et les Abruzzes ont dépassé la vitesse de la lumière de 6 km/s. La découverte pourrait bouleverser la physique…

Erreur de mesure ou révolution scientifique?

Des mises en lumière



Deux origines :
- Un dysfonctionnement technique
- Une erreur systématique

- Et entre les deux…

Un extrait d'un ouvrage

3.1 Calcul d'incertitudes

Les incertitudes sur les mesures se répercutent sur le résultat.

On utilise la formule mathématique définissant la différentielle totale exacte d'une fonction f de plusieurs variables (x, y, z) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{3.2}$$

Ceci nous permet de prédire l'incertitude totale donnée par :

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z \tag{3.3}$$

Exercice: *On a mesuré deux longueurs, $l_1 = 29,7$ cm et $l_2 = 13,2$ cm à 1 mm près ($\Delta l = 1$ mm). Donner l'incertitude sur la somme S et la différence D.*

On a $S = l_1 + l_2$ et $D = l_1 - l_2$, d'où :

$$\Delta S = \Delta D = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 2\Delta l \tag{3.4}$$

Ce qui donne finalement : $S = (42,9 \pm 0.2)$ cm et $D = (16,5 \pm 0.2)$ cm.

Cours d'une école d'ingénieur 2008

La problématique du périmètre

- On mesure les dimensions d'un boitier de CD et on obtient 12,5 et 14,1 cm a un millimètre près.
- $\Delta L = \pm 1 \, mm$
- On obtient donc $P = 53{,}2 \pm 0{,}4 \; cm$

Mais peut on être plus précis ou explicite ?

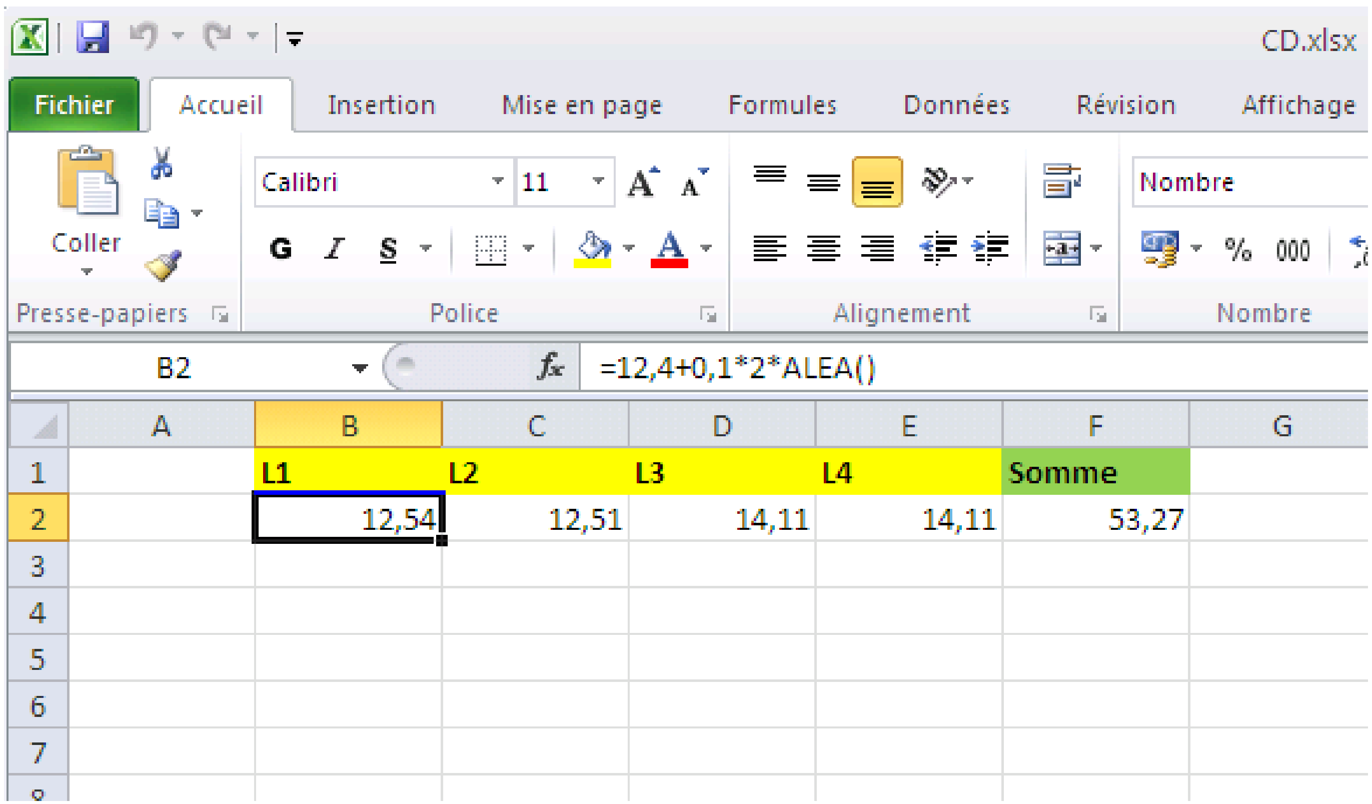
Que signifie ce $53{,}2 \pm 0{,}4 \; cm$?

- Puisqu’on ne connaît rien de la valeur (en dehors de l’encadrement) on va supposer que chacune des dimensions peut prendre toute valeur dans l’intervalle d’encadrement proposé

- pour se donner une image de ce qui se passe on peut imaginer qu’on tire un nombre au hasard (**randomisation**)

Mesure CD

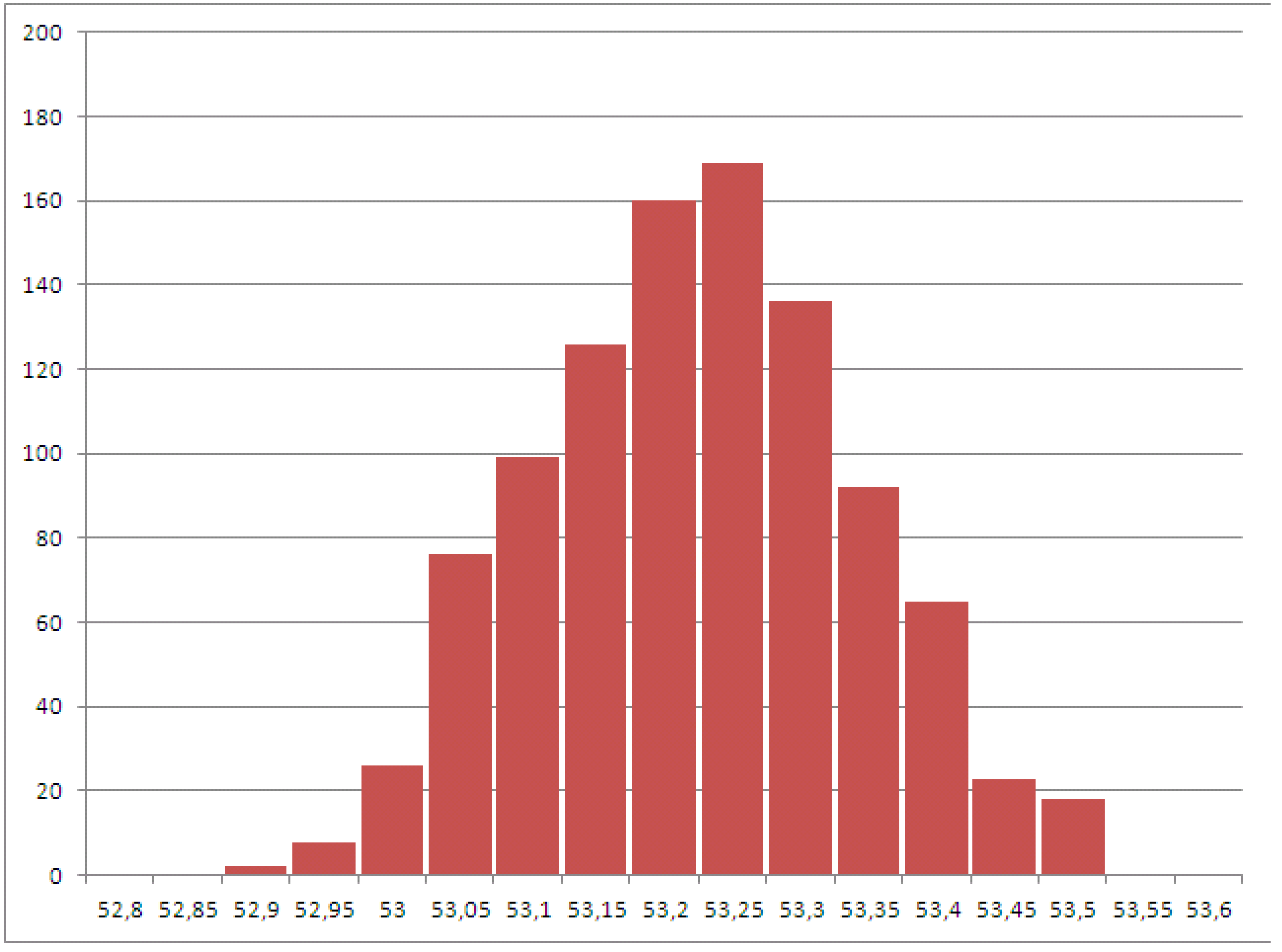
La problématique du périmètre



La problématique du périmètre

	A	B	C	D	E	F	G
1		L1	L2	L3	L4	Somme	
987		12,53	12,52	14,08	14,18	53,31	
988		12,45	12,58	14,09	14,17	53,28	
989		12,40	12,60	14,14	14,10	53,24	
990		12,49	12,56	14,09	14,11	53,24	
991		12,50	12,59	14,19	14,14	53,41	
992		12,59	12,58	14,12	14,00	53,29	
993		12,53	12,45	14,09	14,01	53,09	
994		12,58	12,48	14,18	14,09	53,33	
995		12,53	12,54	14,11	14,04	53,21	
996		12,54	12,42	14,11	14,09	53,16	
997		12,49	12,46	14,17	14,14	53,25	
998		12,52	12,44	14,09	14,09	53,13	
999		12,56	12,54	14,00	14,04	53,14	
1000		12,49	12,48	14,01	14,17	53,16	
1001		12,59	12,41	14,17	14,18	53,35	
1002							

La problématique du périmètre



La problématique du périmètre

	moyenne	53,1991822	
	effectif	intervalles	
52,8	0		
52,85	0	52,8	52,85
52,9	2	52,85	52,9
52,95	8	52,9	52,95
53	26	52,95	53
53,05	76	53	53,05
53,1	99	53,05	53,1
53,15	126	53,1	53,15
53,2	160	53,15	53,2
53,25	169	53,2	53,25
53,3	136	53,25	53,3
53,35	92	53,3	53,35
53,4	65	53,35	53,4
53,45	23	53,4	53,45
53,5	18	53,45	53,5
53,55	0	53,5	53,55
53,6	0	53,55	53,6
		97%	

- Au prix d’une perte « de certitude » sur les **possibles**, on a réduit l’intervalle des valeurs **plausibles**
- On peut penser que **toutes** les valeurs sont comprises entre 52,8 et 53,6
- Mais on peut estimer **qu’environ 97%** des valeurs sont comprises entre 52,95 et 53,45

Un peu d’histoire

Pierre Simon de Laplace

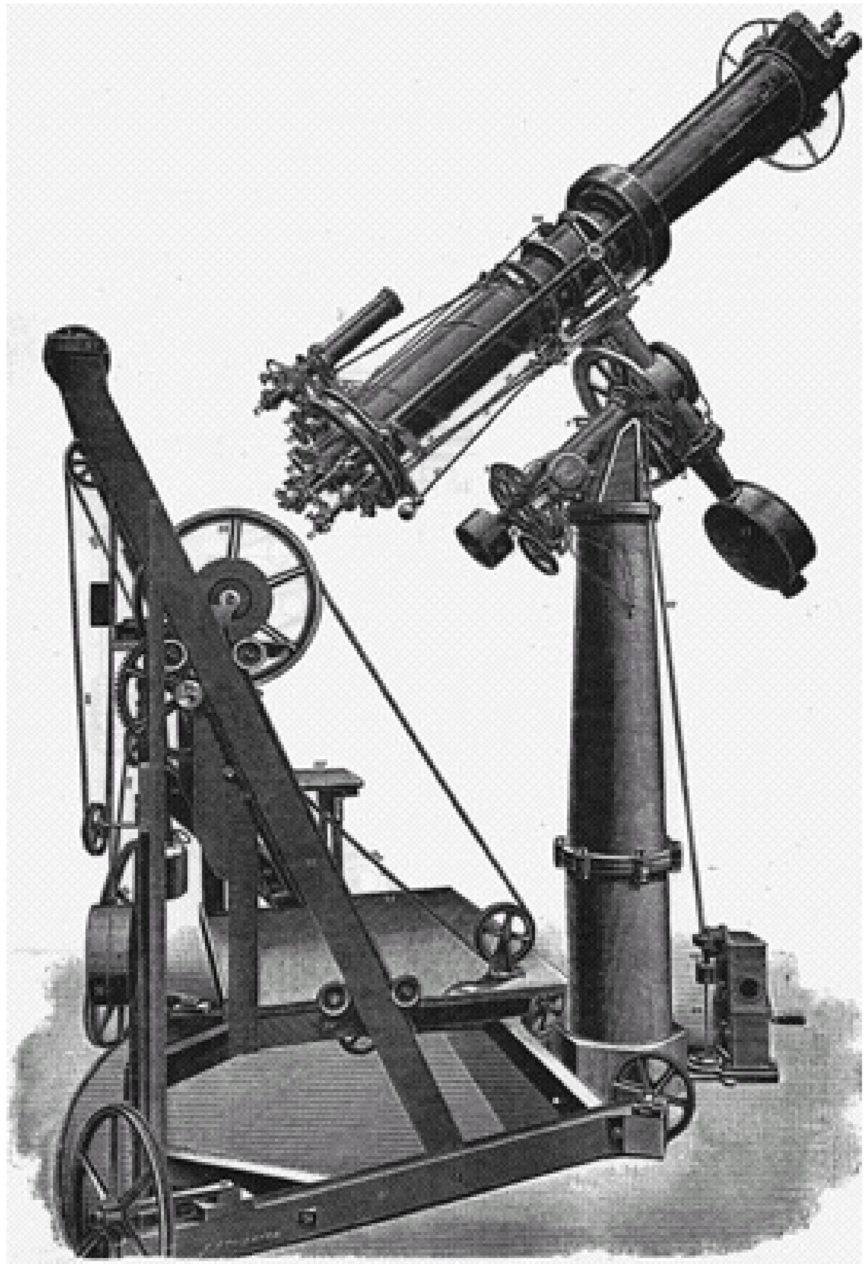
Friedrich Gauss

Les mesures astronomiques ont déjà abordé cette problématique de « la loi des erreurs »

De SIMPSON à GAUSS, en passant par LAPLACE, la loi des erreurs est un objet d'étude.

- Variabilité des mesures
- La moyenne donne une meilleure estimation de la réalité
- Une distribution des valeurs en forme de cloche

« il n'y a aucun doute que les petites erreurs ont lieu plus souvent que les grandes »



La problématique de l’erreur

- On cherche à estimer une « valeur vraie » y_0 d’une caractéristique, et à quantifier l’erreur commise sur cette estimation

- Quelques difficultés:
  - ➢ la « valeur vraie » n’existe pas !
  - ➢ l’origine des erreurs est diverse !
    - \- l’instrument de mesure (justesse, reproductibilité, sensibilité)
    - \- l’environnement
    - \- l’opérateur

La problématique

- La démarche visée est de fournir, autour du résultat d'un mesurage, **un intervalle** dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.
- « La méthode idéale d'évaluation et d'expression de mesure devrait pouvoir aisément *fournir un intervalle* avec une probabilité ou un niveau de confiance qui corresponde d’une manière réaliste à la distribution des valeurs. »

Une approche probabiliste des erreurs

- Une manière d'interpréter les résultats est de passer par une **« randomisation »**, c'est-à-dire qu'on explique des résultats déterministes (il n'y a pas d'aléatoire dans les mesures) comme s'ils étaient des réalisations d'une variable aléatoire.
- **L'erreur de mesure est modélisée par une variable aléatoire**
- On modélise le mesurage par

$$Y = y_0 + E$$

- L'hypothèse fondamentale du traitement probabiliste de l'erreur est que la variable E obéit à une loi de probabilité « bien définie ».

Les composantes de l’erreur

- **Composante aléatoire de l’erreur**

l’erreur aléatoire Δ provient des variations temporelles et spatiales **non prévisibles** de grandeurs d’influence

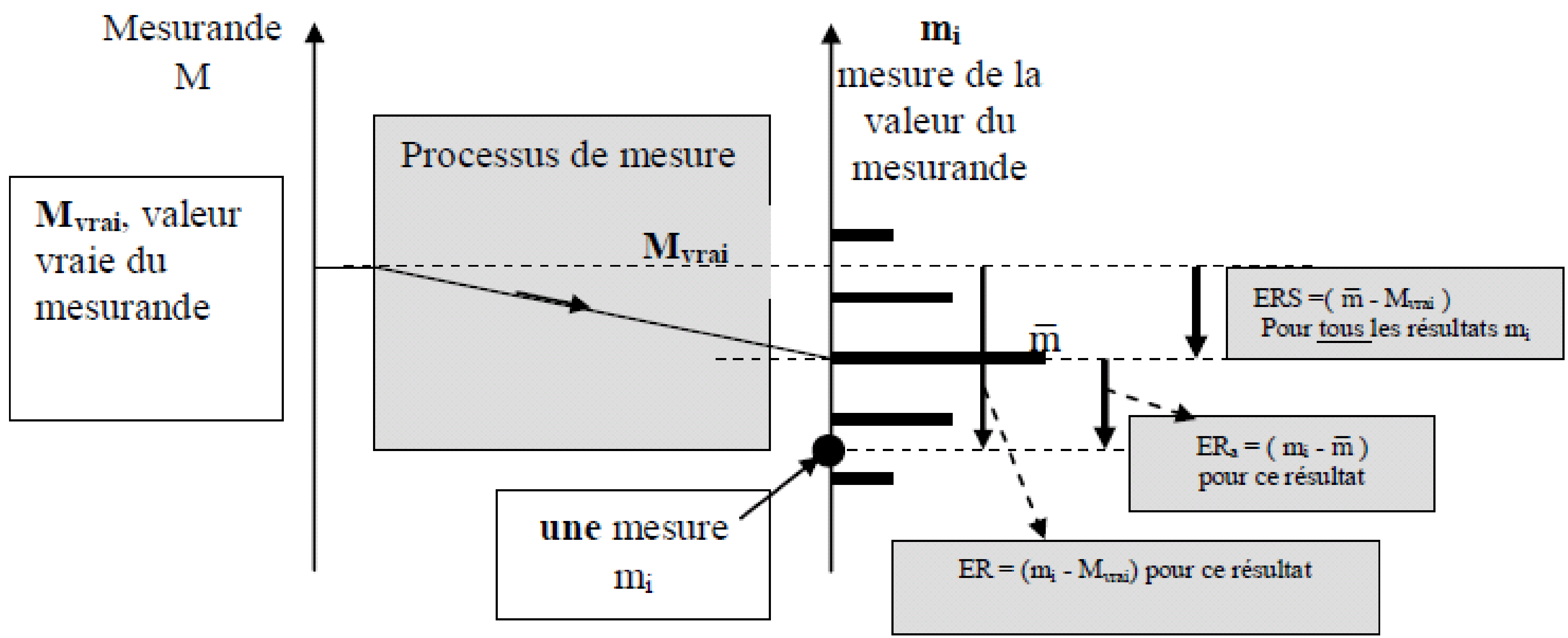
L’erreur aléatoire est liée aux conditions opératoires

➢ elle peut être réduite en augmentant le nombre d’observations

- **Composante systématique de l’erreur**

L’erreur systématique ε se produit sur un résultat de mesure à partir d’un **effet reconnu**

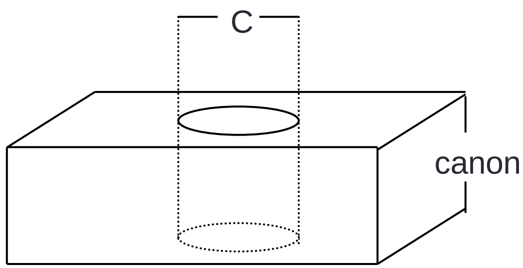
➢ elle peut être réduite en opérant une correction

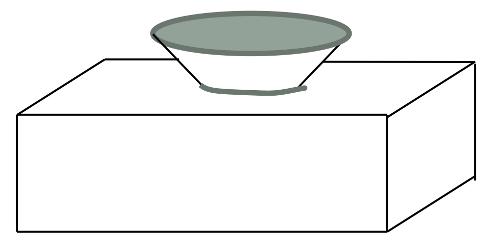


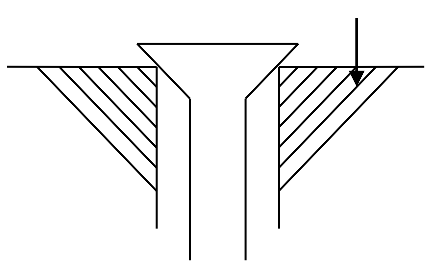
Extrait du document de l'IGEN
« nombres, mesures, incertitudes » (mai 2010)

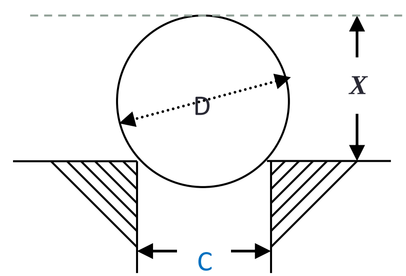
Un exemple

Contrôle d'un « canon à hauteur de tête » (utilisé pour le contrôle de pièces coniques)





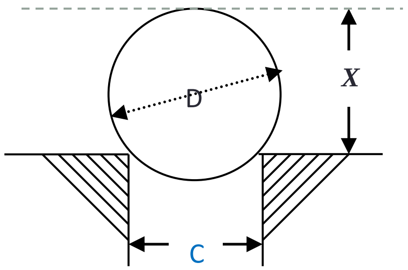




$$C = 2\sqrt{XD - X^2}$$

Un exemple

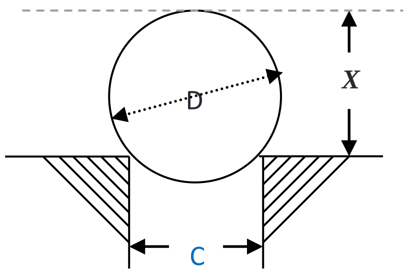
Les sources d'erreurs :



- Les effets de la température
- La déformation de la tête du canon
- Le défaut de forme de la bille
- Le défaut de planéité de la surface de la tête du canon
- Le défaut de justesse du comparateur
- Les erreurs de manipulation de l'opérateur

Un exemple

Les sources d’erreurs :



- Les effets de la température (négligé)
- La déformation de la tête du canon
- Le défaut de forme de la bille
- Le défaut de planéité de la surface de la tête du canon
- Le défaut de justesse du comparateur
- Les erreurs de manipulation de l’opérateur

Modélisation du mesurage

- *On peut donc modéliser le mesurage par* $Y = y_0 + \varepsilon + \Delta$

- **Une hypothèse pragmatique : il n'y a pas de raison objective pour que les résultats se répartissent plus d'un côté que de l'autre de la « valeur vraie »**

- On suppose que la méthode de mesure est correcte, ce qui se traduit mathématiquement par :

  - l'espérance des variables ε et Δ est nulle

  - l'espérance de Y est y_0, la « valeur vraie »

Incertitude

- **Incertitude** : *paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande.*

- L'écart-type *de Y est appelé* **incertitude-type** *sur le résultat du mesurage*

- Deux moyens d'estimation de l'incertitude-type :
  - Par des moyens statistiques , une évaluation de type A
  - Par un modèle probabiliste , une évaluation de type B

Incertitude

- Faisons le point…

⇨ $Y = y_0 + \varepsilon + \Delta$,

⇨ où ε et Δ sont deux variables aléatoires de moyenne nulle

➢ On cherche à déterminer la répartition des valeurs prises par $E = \varepsilon + \Delta$ ce qui passe souvent par la détermination :
  - de la loi de $E = \varepsilon + \Delta$
  - l'écart-type de cette loi (bon indicateur de la dispersion)

Incertitude

- Faisons le point…

⇨ Soit on a effectué des relevés de données de la grandeur X et on estime l'écart-type de la population de tous les relevés possible : *c'est une évaluation de type A*

⇨ Soit on a des « données constructeur » et on a *une évaluation de type B*, basée sur des lois de probabilité

Évaluation de type A

- Pour une grandeur X estimée à partir de *n* observations $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, répétées indépendantes obtenues dans les mêmes conditions de mesure

on prend comme ***estimation ponctuelle*** *de X le nombre*

$\bar{x}$ *défini par* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Le nombre $s^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

est la meilleure ***estimation*** *de la variance de X notée* $\sigma^2(X)$

s(X) est appelé écart-type expérimental **d'une mesure** ou écart-type de répétabilité.

Une parenthèse : estimateur et estimation

- Un estimateur est une variable aléatoire

Exemple : Si $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont des variables aléatoires qui correspondent aux 1er , 2nde , n^{ème} réalisations d'une variable X de moyenne m et d'écart-type σ, alors $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ est une variable aléatoire de moyenne m et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- Une estimation est une valeur prise par un estimateur sur un échantillon

Les propriétés de l'estimateur en tant que variable aléatoire nous laissent espérer que la valeur qu'elle prend sur l'échantillon (l'estimation) est proche de la valeur vraie du paramètre estimé.

Une parenthèse : estimateur et estimation

Pour cela on attend quelques propriétés des estimateurs :

- « non biaisé » ce qui signifie que sa moyenne est la valeur du paramètre estimé
- « convergent » ce qui signifie que plus *n* est grand , meilleure est l'estimation (vérifié lorsque « non biaisé » et que la variance tant vers 0 quand *n* tend vers l'infini)

Exemple : On considère une variable aléatoire *X* et un *n*-échantillon de valeurs de *X*, alors :

${S_n}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$ a pour moyenne $\frac{n-1}{n}\sigma^2$, il est biaisé

On est amené à prendre comme meilleur estimateur de la variance de X, l'estimateur ${S_{n-1}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$

Évaluation de type A

- Dans la pratique, pour des problèmes de coût on aura souvent une estimation de $s(X)$, produite dans des conditions similaires par un autre opérateur ou à un autre moment que celui de l'évaluation de l'incertitude.

- On considère que l'estimation de $s(X)$ *reste l'écart-type expérimental d'une mesure*. Si on évalue X à partir de la moyenne de p observations indépendantes,

$$\text{alors on prendra } u(x) = \frac{s(X)}{\sqrt{p}}$$

Évaluation de type A

On obtient dix mesures de la grandeur X , en mm avec un comparateur :

8,505	8,502	8,501	8,507	8,506	8,501	8,501	8,506	8,503	8,501

on en déduit que $\bar{X} \;= 8{,}5033\ mm$ et $s_{n-1} = 2{,}451 \ldots 10^{-3} mm$

Dans des mesurages ultérieurs, dans les mêmes conditions et pour le même type de pièce, on gardera cette valeur comme estimation de l'incertitude-type aléatoire sur **un** mesurage

Évaluation de type B

- Lorsque l'estimation d'une grandeur X ne peut être obtenue à partir d'observations répétées, la variance estimée ou l'incertitude-type sont évaluées par un jugement fondé sur des lois de probabilité supposées a priori.

- La détermination de la loi de propagation de l'erreur est liée à la maîtrise du processus de mesure et à l'expérience de l'opérateur

Évaluation de type B

- elle dépend d'un ensemble d'informations qui peuvent être :

➢ des résultats de mesures antérieures

➢ l'expérience ou la connaissance du comportement et des propriétés des matériaux et instruments utilisés

➢ des facteurs d'influence (température, pression,.....)

➢ des spécifications du fabricant

➢ les données fournies par des certificats d'étalonnage ou autres

➢ l'incertitude assignée à des valeurs de référence et donnée avec ces valeurs

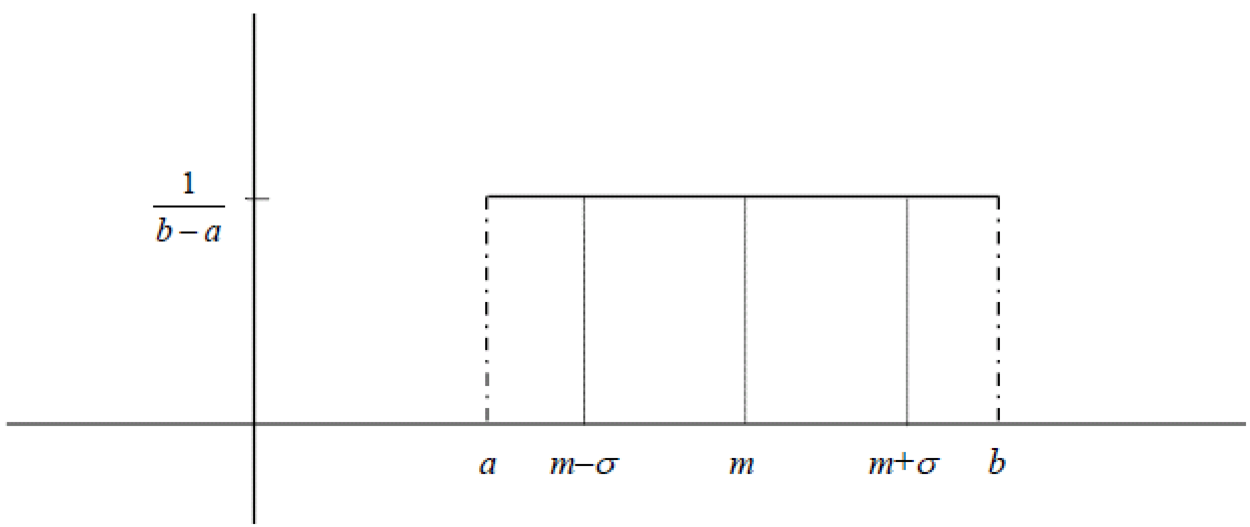
Une parenthèse : les lois de probabilité

Si X suit une loi de probabilité de densité f alors

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)dx$$

Exemple 1 : X suit une loi uniforme sur $[\![a\,;b]\!]$,

$$E(X) = m = \frac{a+b}{2} \text{ et } Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

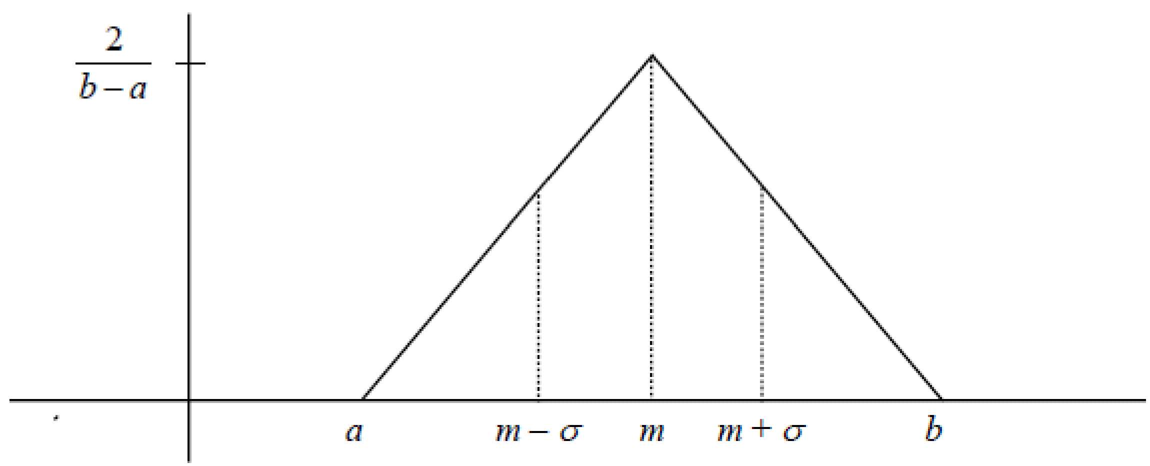


Une parenthèse : les lois de probabilité

Exemple 2 :

X suit une loi triangulaire sur $[\![a\,;b]\!]$,

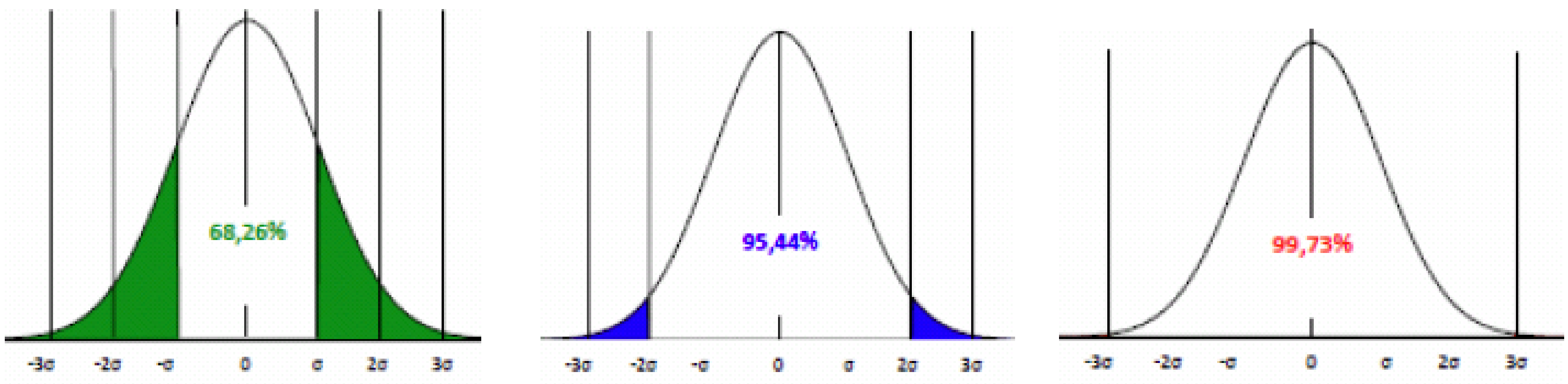
$$E(X) = m = \frac{a+b}{2} \text{ et } Var(X) = \frac{(b-a)^2}{24}$$



Une parenthèse : les lois de probabilité

Exemple 3 :

X suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ



allure de la densité de $X - m$

Incertitude-type sur une grandeur

- $$Y = Y_0 + E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

où les variables $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ représentent les différentes composantes **indépendantes** de l'erreur

On a alors: $u^2(Y) = u^2(E_1) + u^2(E_2) + \ldots u^2(E_n)$

Incertitude-type sur une grandeur

- Un exemple simple et fréquent

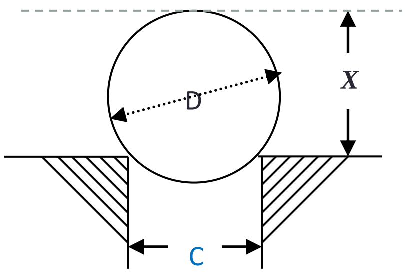
Y représente le mesurage d'une pièce dans des conditions d'environnement contrôlées. On effectue une série d'observations à l'aide d'un instrument de mesure, les composantes retenues de l'erreur amènent au calcul de:

- L'incertitude-type u_A déterminée statistiquement des observations
- L'incertitude-type u_B déterminée sur la justesse de l'instrument de mesure

Alors $u^2(Y) = {u_A}^2 + {u_B}^2$

Incertitude-type sur une grandeur

- Revenons à l'exemple :



$$C = 2\sqrt{XD - X^2}$$

L'appareil utilisé est un comparateur au micron, dont le dossier d'étalonnage indique que, pour une mesure de 8 mm, l'incertitude à 3 écarts-types est 5 µm

L'incertitude sur **une mesure** de X :

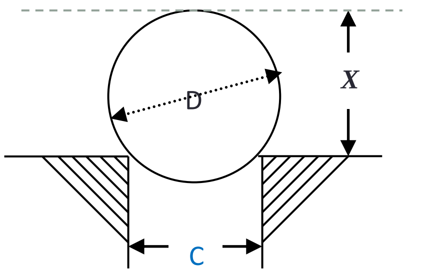
- L'incertitude-type (aléatoire) $u_A = 2{,}451 \ldots . \, 10^{-3} mm$

- L'incertitude-type (systématique) $u_B = 1{,}666 \ldots . \, 10^{-3} mm$
déterminée sur la justesse de l'instrument de mesure

Alors $u^2(X) = {u_A}^2 + {u_B}^2$ nous donne $u(X) = 3{,}087 \ldots 10^{-3} mm$

Incertitude-type sur une grandeur

- Revenons à l'exemple :



$$C = 2\sqrt{XD - X^2}$$

La bille utilisée a un diamètre de 12mm avec un défaut de forme maximum de $\pm\, 0{,}01\ mm$

L'incertitude sur D (évaluation de type B, loi rectangulaire)

$$u(D) = \frac{0{,}01}{\sqrt{3}}\ mm$$

Incertitude-type composée

- En général $Y = f(X_1, X_2, \dots X_n)$

Où les X_i sont des grandeurs mesurées, des corrections d'erreurs systématiques, des constantes physiques, des grandeurs d'influence estimées, pour lesquelles on connaît les lois et pour chacune l'incertitude-type $u(x_i)$

Dans le cas où les $X_1, X_2, \dots X_n$ sont deux à deux indépendantes, on prend pour incertitude-type sur Y, le nombre $u_c(y)$ défini par:

$$u_c^{\,2}(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right)^2 u^2(x_i)$$

$$u_c^{\,2}(y) = \sum_{i=1}^{n} (c_i u(x_i))^2 \qquad \text{avec } c_i = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right|$$

Incertitude-type composée

- Exemple $C = 2\sqrt{XD - X^2}$

$$\frac{\partial C}{\partial X} = \frac{D-2X}{\sqrt{XD-X^2}} = -0{,}918 \quad \text{et} \quad \frac{\partial C}{\partial D} = \frac{X}{\sqrt{XD-X^2}} = 1{,}559$$

Par conséquent :

$$u^2\,(C) = (-0{,}918\,u(X))^2 + (1{,}559\,u(D))^2$$

Incertitude-type composée

Composante de L'incertitude-type $u(x_i)$	Source de l'incertitude	Incertitude-type $u(x_i)$	$c_i = \left\lvert \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rvert$	$c_i u(x_i)$	Poids relatif de la variance
$\boldsymbol{u(x)}$ $u_a(x)$ $u_s(x)$	 10 observations répétées (s_9) Erreur de justesse vérifiée (normale, 3 écarts-types)	3,087… 10^{-3} 2,451..10^{-3} 1,666..10^{-3}	0,918…	2,789…10^{-3}	**8,3%**
$\boldsymbol{u(D)}$	Constructeur (rectangulaire)	5,7735…10^{-3}	1,559…	9,000.. 10^{-3}	**91,6%**

Incertitude-type composée

On a donc

$$u^2\ (C) = (-0{,}918\, u(X))^2 + (1{,}559\, u(D))^2$$

$$u_c(C) = 9{,}4224\, \ldots .10^{-3}\, mm$$

Quelle signification en termes de distribution des valeurs prises par *C* ?

Quelle est la loi des erreurs sur *C* ?

Incertitude élargie

- On aimerait déterminer un nombre k tel que si Y est estimé par y avec une incertitude $U(y)=k\, u_c(y)$, alors on peut affirmer que :

  $y - U(y) \leq Y \leq y + U(y)$ avec une probabilité p proche de 1

  $U(y)$ noté également U est appelée incertitude élargie sur Y

- Le facteur k est déterminé à partir de la loi de Y.

  Dans la pratique, on peut **souvent, mais pas systématiquement** supposer que la loi suivie par Y est une loi normale

Une parenthèse : les valeurs de *k*

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi :

	uniforme	triangulaire	normale
Au niveau de 95%	1,64	1,90	**1,96**
Au niveau de 99%	1,72	2,20	2,58

Une parenthèse : la loi normale et le Théorème Limite Central

Si X_i sont des variables aléatoires indépendantes de même loi, de moyenne m et d'écart-type σ alors la variable

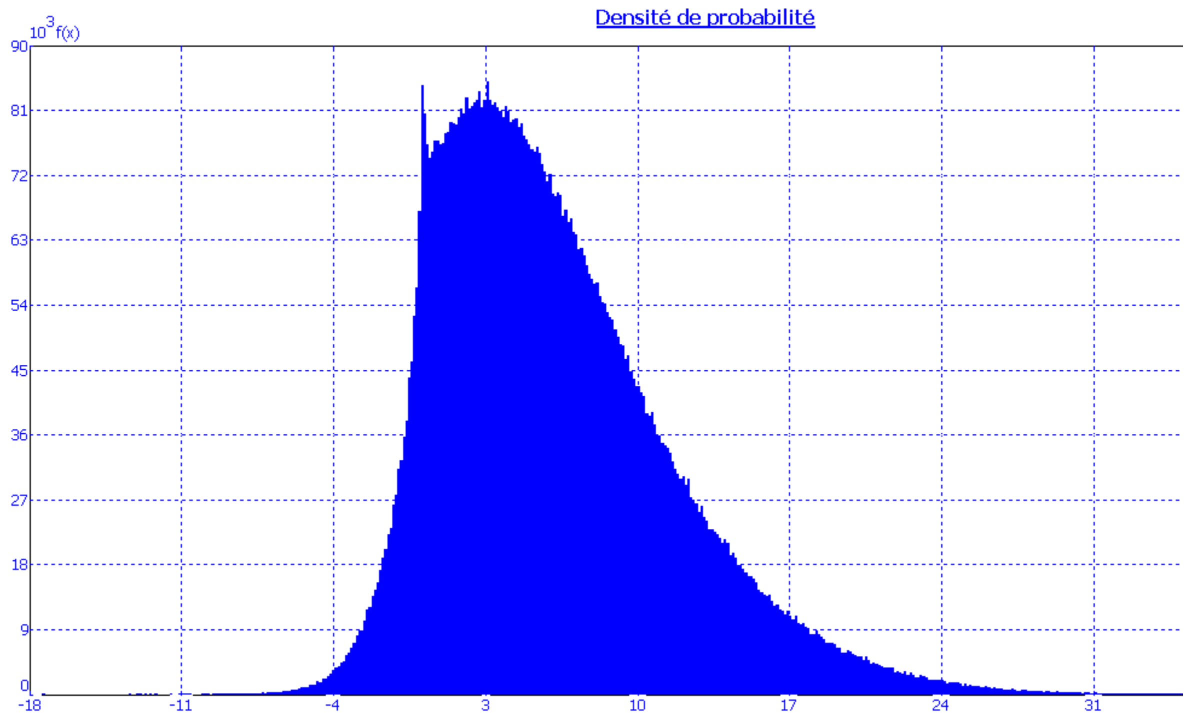
$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit approximativement une loi normale de moyenne mn et d'écart-type $\sigma\sqrt{n}$ ou encore

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit approximativement une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Et même si les X_i ne suivent pas exactement la même loi, dans les deux cas ci-dessous :

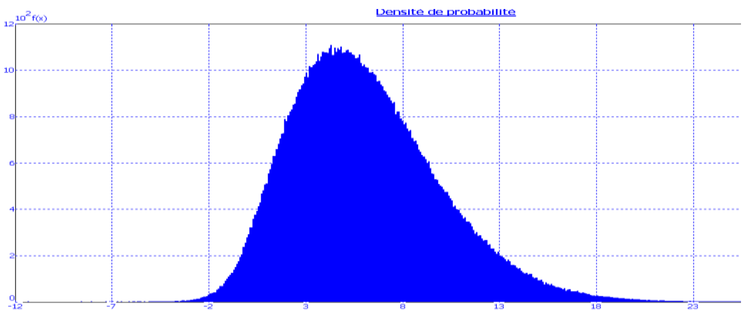
- On a au moins trois lois rectangulaires
- On a une loi normale qui contribue significativement

Alors la somme suit approximativement une loi normale

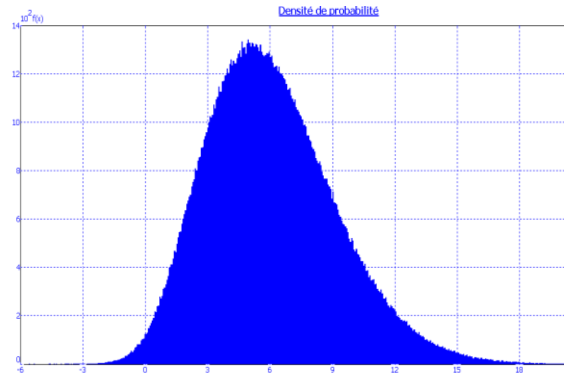


Densité des X_i

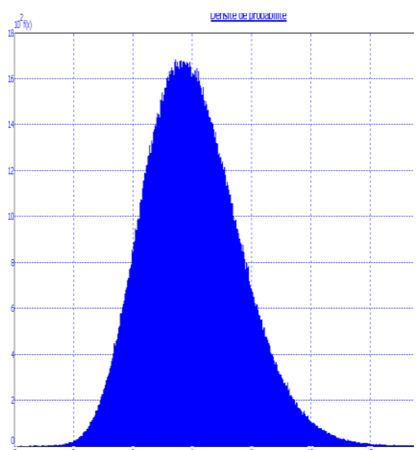
Densité des moyennes



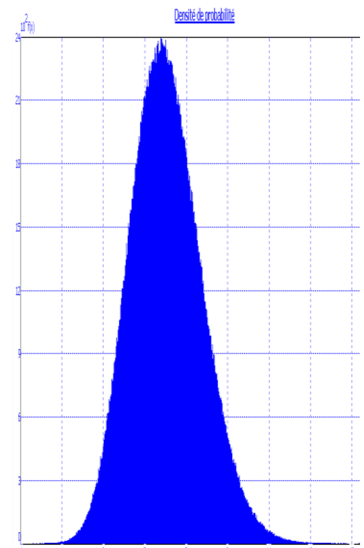
deux variables



trois variables



cinq variables



dix variables

Présentation des résultats

- Arrondissage

  Une règle : garder deux chiffres significatifs

Mais, dans le cas d'une incertitude de type A, l'incertitude sur l'incertitude est en pourcentage de $\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}$ où n représente le nombre de données relevées, ce qui signifie que pour 10 valeurs l'erreur relative est de l'ordre de 25 %

On peut donc se limiter à un chiffre significatif

Présentation des résultats

- Arrondissage

Dans notre exemple :

$u_c(C)$ = 9,422 4… 10^{-3} mm

Avec k = 2, (on suppose que la loi de L est normale et qu'on a un intervalle de confiance à 95%)

on a :

U = 18,844 8… 10^{-3} mm, arrondi à 19 10^{-3} mm

Présentation des résultats

- Lorsqu'on exprime le résultat d'un mesurage et son incertitude, il est bon de donner un maximum d'informations sur les conditions d'obtention des résultats annoncés, par exemple:

➢ Décrire les méthodes utilisées

➢ Donner la listes des composantes de l'incertitude et la manière dont elles ont été évaluées

➢ Présenter l'analyse des résultats de telle façon que ces derniers puissent être réutilisés

➢ Les résultats préciseront, au minimum, le facteur d'élargissement et le niveau de confiance de l'intervalle estimé.

Par exemple :

C = 10,905 $\pm$ 0,019 mm où l'incertitude exprimée est une incertitude élargie d'un facteur k = 2. Cette incertitude définit un intervalle estimé avoir un niveau de confiance proche de 95 %

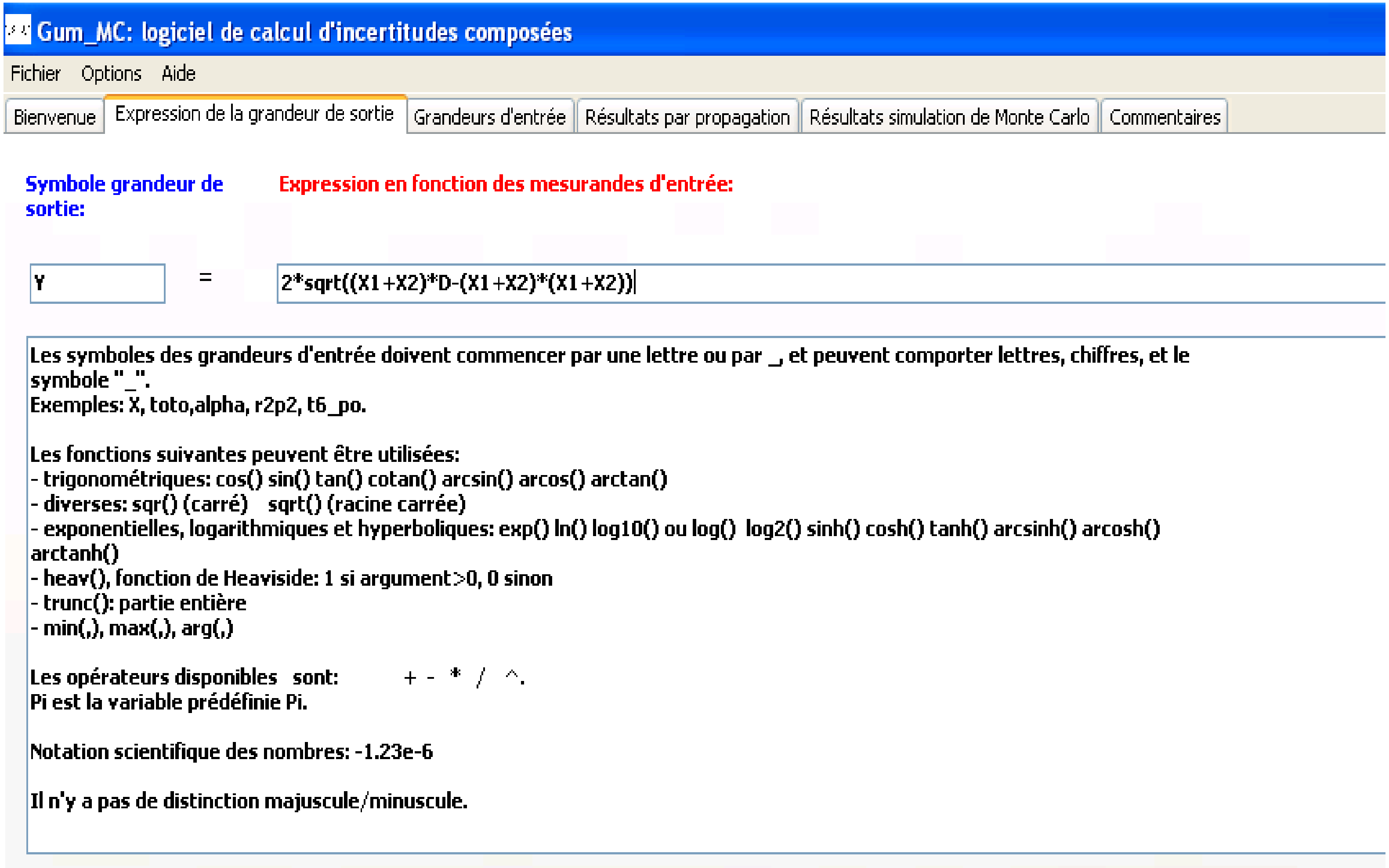
Une nouvelle approche : la simulation

Composante de L'incertitude-type $u(x_i)$	Source de l'incertitude	Incertitude-type $u(x_i)$
$\boldsymbol{u(x)}$		$3{,}087\ldots\ 10^{-3}$
$u_a(x)$	10 observations répétées (s_9)	**$2{,}451..10^{-3}$**
$u_s(x)$	Erreur de justesse vérifiée (normale, 3 écarts-types)	**$1{,}666..10^{-3}$**
$\boldsymbol{u(D)}$	Constructeur (rectangulaire)	**$5{,}7735\ldots10^{-3}$**

$X = X1 + X2$

$X1$ de moyenne 8,5033	écart-type 0,002 451	loi « normale »
$X2$ de moyenne 0	écart-type 0,001 666	loi rectangulaire
D de moyenne 12	écart-type 0,005 773	loi rectangulaire

Une utilisation du logiciel GUM_MC de Jean-Marie Biansan


Gum_MC: logiciel de calcul d'incertitudes composées
Fichier Options Aide
Bienvenue
Expression de la grandeur de sortie
Grandeurs d'entrée
Résultats par propagation
Résultats simulation de Monte Carlo
Commentaires
Symbole grandeur de sortie:
Expression en fonction des mesurandes d'entrée:
Y
=
2*sqrt((X1+X2)*D-(X1+X2)*(X1+X2))
Les symboles des grandeurs d'entrée doivent commencer par une lettre ou par _, et peuvent comporter lettres, chiffres, et le symbole "_".
Exemples: X, toto,alpha, r2p2, t6_po.
Les fonctions suivantes peuvent être utilisées:
- trigonométriques: cos() sin() tan() cotan() arcsin() arcos() arctan()
- diverses: sqr() (carré) sqrt() (racine carrée)
- exponentielles, logarithmiques et hyperboliques: exp() ln() log10() ou log() log2() sinh() cosh() tanh() arcsinh() arcosh() arctanh()
- heav(), fonction de Heaviside: 1 si argument>0, 0 sinon
- trunc(): partie entière
- min(,), max(,), arg(,)
Les opérateurs disponibles sont: + - * / ^.
Pi est la variable prédéfinie Pi.
Notation scientifique des nombres: -1.23e-6
Il n'y a pas de distinction majuscule/minuscule.

Bienvenue | Expression de la grandeur de sortie | Grandeurs d'entrée | Résultats par propagation | Résultats simulation de Monte Carlo | Commentaires

Symbole	Type estimation	Estimateur	Incertitude-type	Type de distribution	Tracé distribution	Tracé densité	Descriptif
D	B	12	0.005773	Rectangulaire	Clic ici	Clic ici	
X1	A	8.5033	0.002451	Normale(Gaussienne)	Clic ici	Clic ici	
X2	B	0	0.001666	Rectangulaire	Clic ici	Clic ici	

Caractéristiques de la variable X1

Loi de densité de probabilité ("PDF"):

Normale

Type d'évaluation de l'incertitude-type:

(•) Type A ( ) Type B

Paramètres de la loi:

Moyenne:

8.5033

Et au choix:

(•) **Incertitude-type**

0.002451

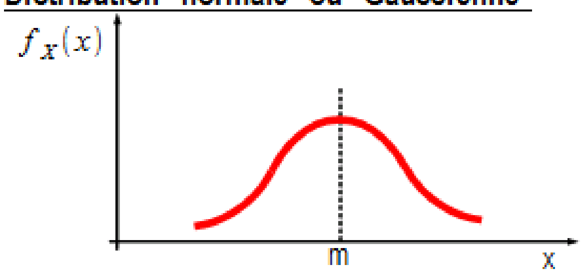
( ) **Incertitude élargie:**

0.00480387172611

Au taux de:

95 %

Distribution "normale" ou "Gaussienne"



Loi de densité: $f_X(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2\right)$.

Moyenne m, écart-type s, variance s^2 .

Exemples d'utilisation:

- moyenne d'un grand nombre de mesures répétées indépendantes
- certificat d'étalonnage
- incertitude standard ou élargie fournie par constructeur

Estimations | Estimations (ordre 2) | Intervalles de confiance: version 1 | Intervalles de confiance: version 2

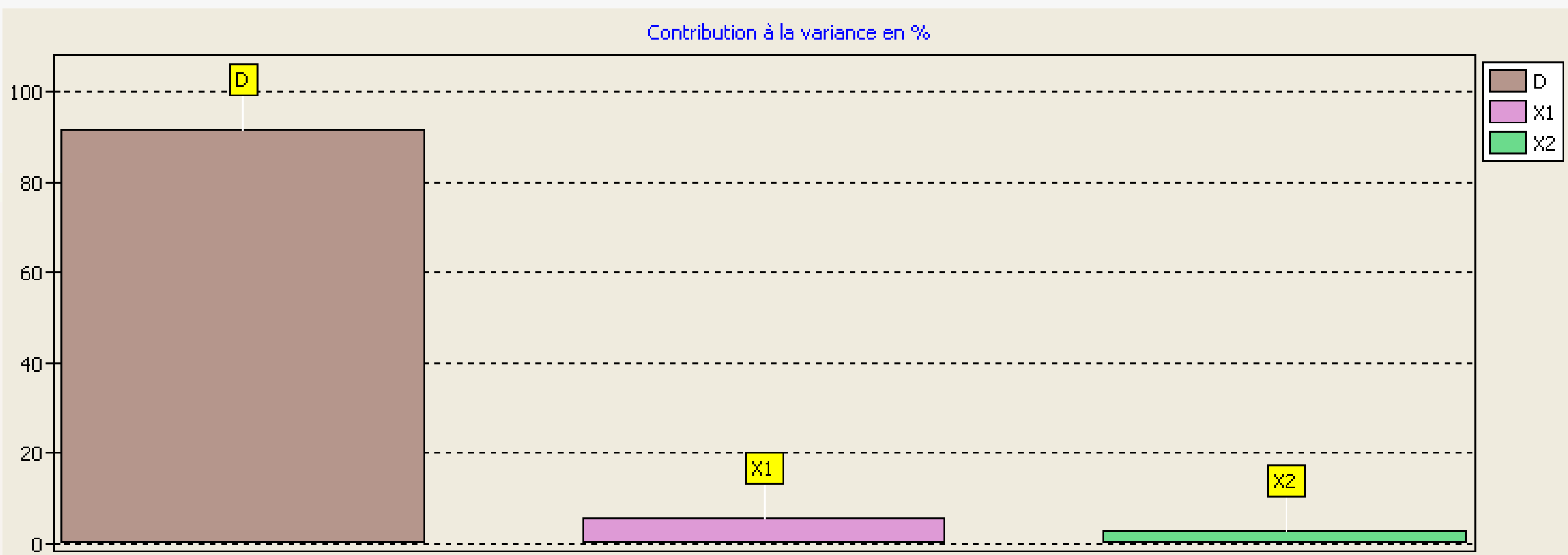
GUM "classique", ordre 1

xi	ci	u(xi)	Contribution à la variance: (ci*u(xi))^2	Contribution en % à la variance
D	1.56	0.00577	8.10E-5	91.6 %
X1	-0.918	0.00245	5.06E-6	5.73 %
X2	-0.918	0.00167	2.34E-6	2.65 %

Estimateur de Y	**Incertitude-type uc(Y)**	**Incertitude-type relative uc(Y)/Y**
10.90568 unité	**0.00940 unité**	**0.000862 = 0.0862%**

Diagramme

- (•) Barres
- ( ) Camembert



Fichier Options Aide

Bienvenue | Expression de la grandeur de sortie | Grandeurs d'entrée | Résultats par propagation | Résultats simulation de Monte Carlo | Commentaires

Estimateurs | Fonction de distribution | Histogramme de densité | Intervalles de confiance

Méthode Monte Carlo

Estimateur	**10.9 unité**
Ecart-type échantillonal	**0.00941 unité**

Gum_MC: logiciel de calcul d'incertitudes composées

Fichier Options Aide

Bienvenue | Expression de la grandeur de sortie | Grandeurs d'entrée | Résultats par propagation | Résultats simulation de Monte Carlo | Commentaires

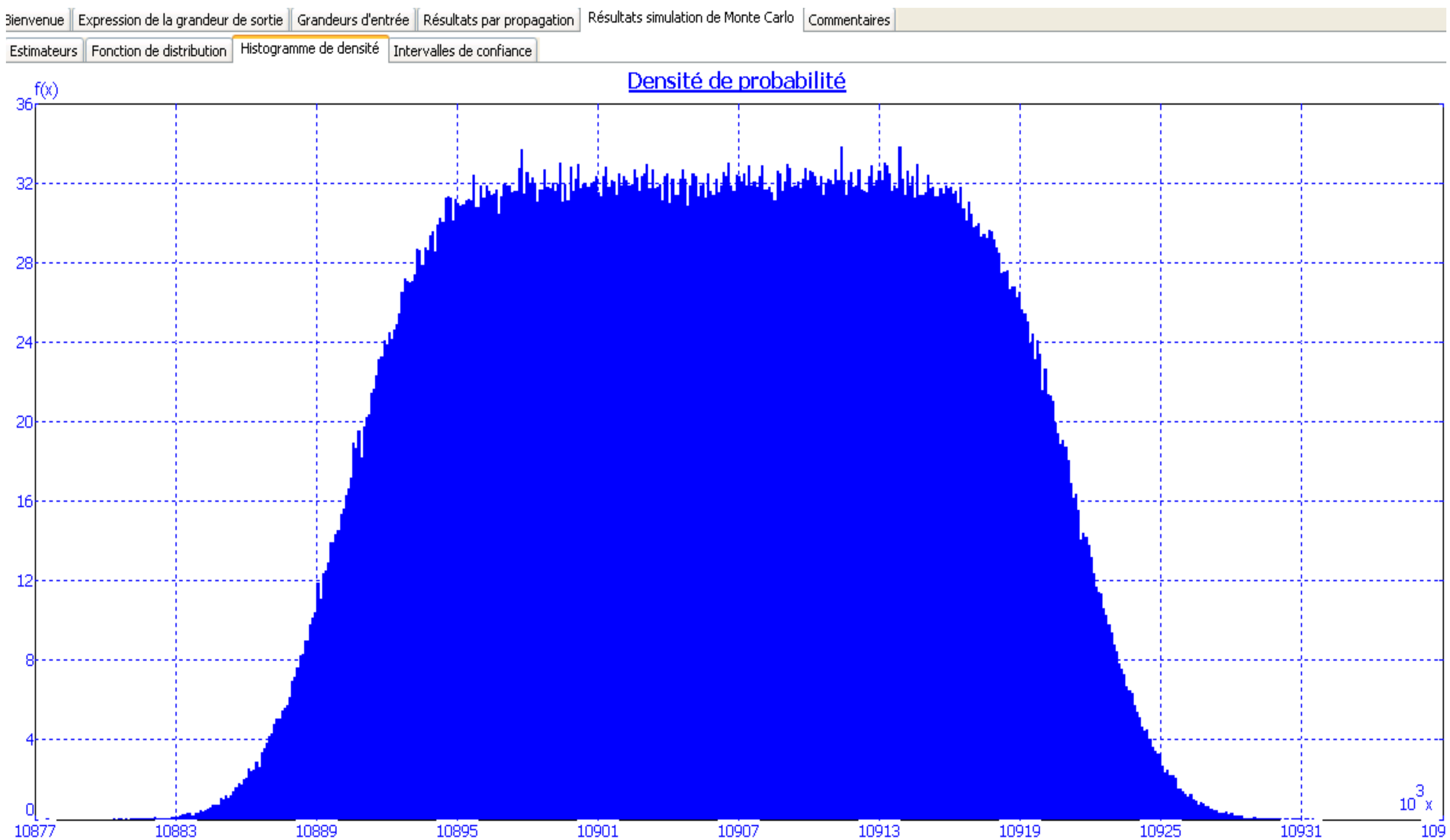
Estimateurs | Fonction de distribution | Histogramme de densité | Intervalles de confiance

Intervalles de confiance symétriques (n'a d'intérêt que si l'histogramme de densité est symétrique)

Taux de confiance	Intervalle	Demi-largeur	Ecriture finale (1 chiffre sur incertitude)	Ecriture finale (2 chiffres sur incertitude)
75%	[10.89389 ; 10.91749]	0.0118 unité	(10.91 ± 0.02) unité	(10.906 ± 0.012) unité
95%	[10.88939 ; 10.92196]	0.0163 unité	(10.91 ± 0.02) unité	(10.906 ± 0.017) unité
99%	[10.88683 ; 10.92449]	0.0188 unité	(10.91 ± 0.02) unité	(10.906 ± 0.019) unité

Intervalles de confiance les plus courts (n'a d'intérêt que si l'histogramme de densité n'est pas symétrique)

Taux de confiance	Intervalle	Demi-largeur
75%	[10.8941 ; 10.9177]	0.0118 unité
95%	[10.8894 ; 10.9219]	0.0163 unité
99%	[10.8868 ; 10.9244]	0.0188 unité



Bienvenue
Expression de la grandeur de sortie
Grandeurs d'entrée
Résultats par propagation
Résultats simulation de Monte Carlo
Commentaires
Estimateurs
Fonction de distribution
Histogramme de densité
Intervalles de confiance
Densité de probabilité
f(x)
36
32
28
24
20
16
12
8
4
0
10877
10883
10889
10895
10901
10907
10913
10919
10925
10931
109
10 3 x

Quelques remarques générales

Sur des pratiques : incertitude-type sur une grandeur

- Pour déterminer une « valeur vraie » d'une grandeur
  - On effectue un nombre *n* de mesures
  - On propose comme valeur la moyenne de ces *n* mesures
  - On propose comme incertitude type, l'écart type estimé sur la moyenne de la population ou celui de la moyenne de l'échantillon des *n* mesures
- Problèmes:
  - On néglige ainsi l'incertitude systématique
  - On ne précise pas que l'écart type est obtenu sur **la moyenne** et non pas sur une valeur, ce résultat n'est donc pas facilement réutilisable

Quelques remarques générales

- Confusion entre estimation et estimateur
- Confusion entre incertitude et modalité de calcul de l'incertitude (on lit parfois « incertitude de type A »)
- On ne s'interroge pas toujours sur l'utilisation ultérieure d'un calcul d'incertitude
- La valeur du facteur d'agrandissement k est choisie souvent de manière « mystérieuse » et pas au bon moment !

Le cas des valeurs uniques : quelle variabilité ?

Deux situations :

- Une mesure unique
  - Quelle confiance ai-je dans la qualité du résultat ?
  - Peut-on penser que toutes les valeurs que l'on pourrait trouver avec d'autres mesures sont dans un même intervalle ? Lequel ?
  - Une possibilité : utiliser une reproductibilité pour approcher la répétabilité par la mise en commun des données des élèves
- Plusieurs mesures mais un résultat unique
  - Quelle confiance ai-je dans la sensibilité de l'appareil de mesure ?

Quelques remarques générales

Une démarche structurée en 4 (ou 5) étapes

- Étape 1 : Calcul du résultat de mesure
  - Définition du mesurande
  - Analyse du processus de mesure
  - Modélisation mathématique du processus de mesure
  - Recherche des sources d'erreurs
- Étape 2 : Calcul des incertitudes-types
  - Méthodes d'évaluation de type A et/ou de type B
- Étape 3 : Détermination de l'incertitude composée
  - Calcul de l'incertitude composée
  - Loi de propagation des incertitudes
- Étape 4 : Détermination de l'incertitude élargie
  - Détermination de la valeur de k
  - Expression du résultat de mesure et de son incertitude
- Étape 5 : Retour sur les résultats et recherche d'améliorations

Merci de votre attention