

Colonne de gauche = discours fait aux élèves, pas forcément écrit au tableau
Colonne de droite = résumé et illustrations du propos de la colonne de gauche, écrits au tableau ou montrés sur transparents.

Voir l'*Introduction aux cours de thermodynamique* pour situer ce cours dans son contexte. Les exercices signalés sont disponibles en fin du cours.

cours n° 4 : Chaleur, travail et énergie interne des gaz parfaits.

Pré-requis : Chaleur, travail et énergie interne d'un système (cours n° 1, n°2 et n°3).

A retenir :

$P.V = n.R.T = m.r.T$ (R ne dépend pas du gaz alors que r en dépend).
 $\Delta U = C_V \Delta T$ avec C_V la capacité calorifique du G.P. à volume constant.
Le calcul de ΔU , W_{12} ou Q_{12} dans le cas des 4 transformations de base.

1. Le gaz parfait (ou gaz "simplifié").

On a dit que l'état d'un gaz est décrit par la donnée de 3 variables P, V et T que l'on nomme "variables d'état". Ces 3 variables sont liées par la relation caractéristique :

$$P.V = n.R.T$$

avec :

$n \triangleq$ quantité de matière [mol]

$R \triangleq$ constante des gaz parfaits $\approx 8,31434 \pm 0,00035 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Rappel : 1 mole de gaz contient $\approx 6,022 52 \pm 0,000 09.10^{23}$ molécules de gaz.
(incertitudes données par le *cours de physique statistique de Berkeley*, Armand Colin).

Cette équation est indépendante de la nature du gaz : elle est vraie pour l'O₂, le CO₂, l'hélium etc... En particulier cette relation nous indique finalement que la donnée de 2 variables seulement est nécessaire pour connaître l'état du gaz, puisque la 3^{ème} variable est déduite de la relation précédente.

Dans la pratique on utilise souvent la masse d'un gaz au lieu de sa quantité de matière (moins parlante). Dans ce cas, l'équation du gaz (puisque elle dépend alors de la nature du gaz étudié) s'écrit :

$$P.V = m.r.T$$

avec :

$m \triangleq$ masse du gaz [kg]

$r \triangleq$ constante thermodynamique du gaz considéré [$\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$]

Plan :

1. Le gaz parfait
2. Énergie interne U d'un gaz parfait
3. Conséquences pour les 4 transformations de base

Bibliographie :

Introduction à la thermodynamique, C. Lhuillier et J. Rous, Dunod, 1994.
Les machines transformatrices d'énergie, tome 1, par G. Lemasson, Delagrave, 1963

1.

G.P = modèle simplifié d'un gaz réel.

n moles de gaz parfait sont soumises à la contrainte :

$$P.V = n.R.T \text{ c'est l'équation d'évolution des gaz parfaits.}$$

avec :

$n \triangleq$ quantité de matière [mol]

$R \triangleq$ constante des gaz parfaits $\approx 8,32 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, indépendante du gaz considéré.

m kg de G.P. sont soumis à la contrainte :

$$P.V = m.r.T$$

avec :

$m \triangleq$ masse du gaz [kg]

$r \triangleq R / M$ (M = masse molaire du gaz) \triangleq constante thermodynamique du gaz considéré [$\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$]

En réalité l'équation précédente n'est qu'une approximation de la réalité, il s'agit d'une modélisation du gaz qui permet de simplifier son étude. Comme toute modélisation, cette équation des gaz parfaits n'est vraie que dans un domaine d'étude, elle est d'autant plus exacte que son état $P(T)$ est éloigné de la courbe de vaporisation et de la courbe de condensation, tout en restant à $T < T_{\text{critique}}$ (voir cours n°6). Ce domaine d'étude est suffisamment large pour englober beaucoup d'applications industrielles et la relation des gaz parfaits est donc largement utilisée.

Ainsi, **le gaz parfait (G.P.) est le modèle simplifié du gaz réel étudié.** Dans le cas du CO_2 on parle alors du " CO_2 parfait" qui vérifie l'équation $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$. On peut également affiner le modèle précédent pour élargir son champ d'application et parler du " CO_2 réel" qui suit approximativement l'équation $(P + 0,36/V^2) \times (V - 4,3 \cdot 10^{-5} \cdot n) = n \cdot R \cdot T$.

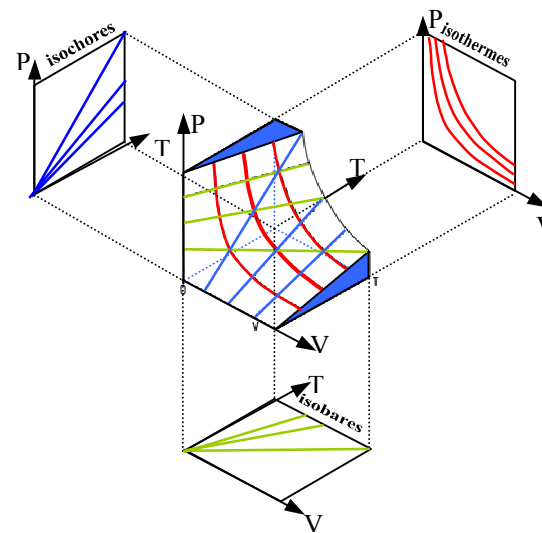
On peut alors représenter la *surface caractéristique* d'un gaz parfait dans l'espace PVT (voir 1/2 page de droite) afin de prévoir d'un coup d'œil l'évolution d'un GP.

2. Energie interne U d'un G.P. (1^{ère} loi de Joule)

On a vu qu'un corps sous forme gazeuse possédait 2 capacités calorifiques massiques (ou chaleurs massiques) différentes, selon qu'on travaille à volume constant ou pression constante : C_v et C_p : la quantité de chaleur $Q = M \cdot C_v \cdot \Delta T$ ou $M \cdot C_p \cdot \Delta T$ développée lors d'une transformation ne dépend donc pas seulement de l'état initial et de l'état final du gaz, mais également des conditions dans laquelle elle s'est déroulée : on disait que Q n'était pas une *variable d'état*. : on ne parle pas de Q_1 (chaleur "contenue" dans le gaz à l'état 1) ou de Q_2 , mais de Q_{12} (chaleur développée pour aller de l'état 1 à l'état 2 du gaz). En revanche l'expérience montre que l'énergie interne U ne dépend que de la température T pour un G.P (1^{ère} loi de Joule) $\Rightarrow U = C^{te} \times T$: ainsi U est une fonction d'état, puisque T est une fonction d'état : on a le droit de parler de l'énergie interne U_1 du gaz dans l'état 1 ou de l'énergie interne U_2 du gaz dans l'état 2. En particulier on écrira ΔU la variation d'énergie interne, au lieu de U_{12} (écriture réservée à la chaleur ou au travail, qui ne sont pas des variables d'état).

On aura bien évidemment $\Delta U = C^{te} \times \Delta T$: la variation d'énergie interne subie lors d'une transformation ne dépend que de la variation de température constatée. En particulier une transformation isotherme ($\Delta T = 0$) laissera inchangée l'énergie interne du gaz ($\Delta U = 0$).

Surface caractéristique d'un gaz parfait :



\Rightarrow 2 variables suffisent pour connaître l'état d'un gaz parfait, la 3^{ème} s'en déduit par une des 3 courbes ci-dessus.

2.

ΔU ne dépend que de ΔT :

$$\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T$$

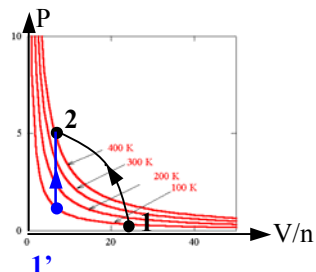
avec :

$m \triangleq$ masse du gaz étudié [kg]

$c_v \triangleq$ capacité calorifique massique à volume constant du gaz étudié [$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$]

\Rightarrow tout le travail absorbé dans une transformation isotherme d'un gaz parfait est intégralement évacué en chaleur, et inversement (cela est faux pour les solides ou les changements de phase).

Précisons la valeur de la constante qui lie ΔU et ΔT : prenons 2 transformations qui amènent le gaz de la température T_1 à la température T_2 . L'une de ces transformations (1-2) et quelconque, l'autre (1'-2) est isochore (cas particulier qui nous donne $W_{1'2} = 0$) :



ΔT identique pour les 2 transformations $\Rightarrow \Delta U_{12} = \Delta U_{1'2} \triangleq \Delta U$
transformation 1'2 : $\Delta U = W_{1'2} + Q_{1'2} = 0 + Q_{1'2} = m \cdot c_v \cdot \Delta T$

d'où pour une transformation quelconque $\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T \Rightarrow m \cdot c_v$ est la constante de proportionnalité entre ΔU et ΔT avec :

$m \triangleq$ masse du gaz étudié [kg]

$c_v \triangleq$ capacité calorifique massique à volume constant du gaz étudié [$J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$]

Note : on démontre que U d'un G.P. est donnée par la relation

$$U = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \text{ pour un G.P. monoatomique.}$$

$$U = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \text{ pour un G.P. diatomique}$$

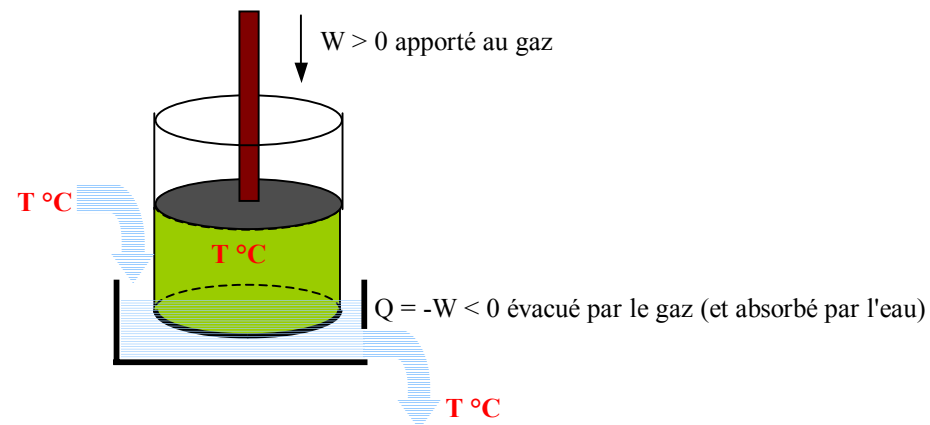
3. Conséquences pour les 4 transformations de base.

3.1. Transformation isochore ($W_{12} = 0$)

Pour une transformation isochore on a alors $\Delta U = Q_{12} + 0$ et $\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T \Rightarrow Q = m \cdot c_v \cdot \Delta T$...on le savait déjà (voir cours n°1), ainsi :

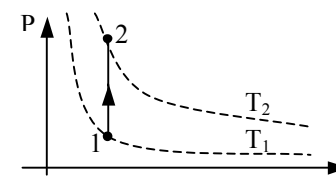
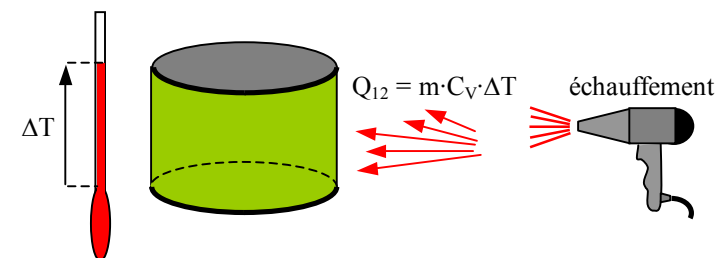
$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ W_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Remarque : il ne faut pas croire que Q_{12} ne dépend pas du trajet suivi (vu qu'elle ne dépend que de ΔT ici) car le trajet est ici rigoureusement défini : il s'agit d'une transfo isochore qui n'est pas un trajet quelconque !



Exercice 1

3.1.



$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ W_{12} &= 0 \end{aligned}$$

3.2. Transformation isobare ($W_{12} = -P \cdot \Delta V$)

On a alors $\Delta U = Q_{12} + W_{12} \Rightarrow m \cdot c_v \cdot \Delta T = m \cdot c_p \cdot \Delta T - P \cdot \Delta V$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= m \cdot c_p \cdot \Delta T \\ W_{12} &= -P \cdot \Delta V\end{aligned}$$

Note : On peut noter $C_p \triangleq m \cdot c_p$ et $C_v \triangleq m \cdot c_v$, d'où $\Delta U = C_p \cdot \Delta T - P \cdot \Delta V$ et $P = C^{te} \Rightarrow C_v \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T - \Delta PV \Rightarrow C_v \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T - \Delta nRT$ or $n = C^{te} \Rightarrow C_v \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T - nR \cdot \Delta T \Rightarrow \boxed{C_p - C_v = nR}$.

Comme C_p et C_v sont des coefficients caractéristiques du gaz (et non de la transformation), cette relation établie dans un cas particulier (transfo isobare) garde son caractère général pour toute transformation.

En outre on constate que l'on a forcément $C_p > C_v \Rightarrow$ il faut plus de chaleur pour élever de ΔT la température d'un corps à pression constante qu'à volume constant (on s'en doutait puisque dans ce dernier cas on n'a pas de perte d'énergie par le biais du travail).

3.3 transformation isotherme

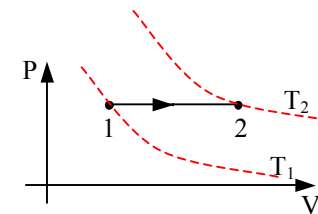
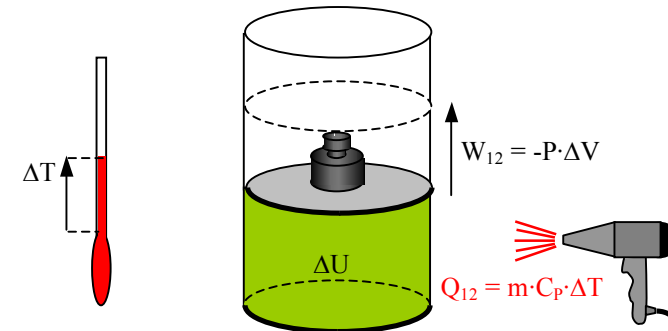
On a alors $\Delta U = Q_{12} + W_{12}$ ou $dU = \delta Q + \delta W \Rightarrow C_v \cdot dT = \delta Q - P \cdot dV \Leftrightarrow \int_T^T C_v \cdot dT = Q_{12} -$

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{nR \cdot T}{V} \cdot dV \Leftrightarrow 0 = Q_{12} - nR \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \cdot dV \Leftrightarrow Q_{12} = nRT \cdot \ln(V_2/V_1)$$

Ainsi :

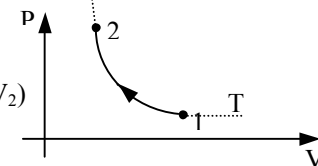
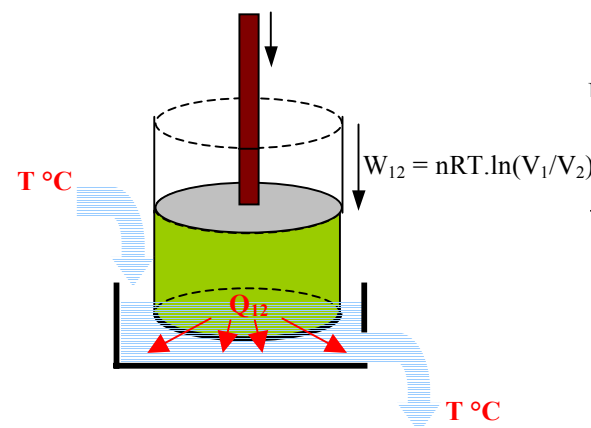
$$\begin{aligned}\Delta U &= 0 \\ Q_{12} &= nRT \cdot \ln(V_2/V_1) \\ W_{12} &= nRT \cdot \ln(V_1/V_2)\end{aligned}$$

3.2.



$$\begin{aligned}\Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= m \cdot c_p \cdot \Delta T \\ W_{12} &= -P \cdot \Delta V\end{aligned}$$

3.3.



$$\begin{aligned}\Delta U &= 0 \\ W_{12} &= nRT \cdot \ln(V_1/V_2) \\ Q_{12} &= -nRT \cdot \ln(V_1/V_2) = -W_{12}\end{aligned}$$

3.4. Transformation adiabatique ($Q_{12} = 0$)

$$\Delta U = Q_{12} + W_{12} \Leftrightarrow C_v \cdot \Delta T = 0 + W_{12}$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= 0 \\ W_{12} &= -m \cdot c_v \cdot \Delta T \end{aligned}$$

Comme $C_v < C_p$ on en déduit qu'il faut moins d'énergie pour élever la température lors d'une transformation adiabatique que lors d'une transformation isobare (on s'en doutait puisque l'adiabatique n'évacue pas la chaleur à l'extérieur). Inversement on peut alors dire qu'à quantités d'énergie évacuée égales, l'expansion isobare abaisse moins la température du gaz que l'expansion adiabatique.

D'autre part :

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q + \delta W \Rightarrow C_v \cdot dT = -P \cdot dV \Rightarrow C_v \cdot dT = -nR \cdot T \cdot dV/V \Rightarrow C_v \cdot dT/T = (C_v - C_p) \cdot dV/V \\ &\Rightarrow C_v \times \ln(T_2/T_1) = (C_v - C_p) \times \ln(V_2/V_1) \Rightarrow \ln(T_2/T_1)^{C_v} = \ln(V_2/V_1)^{(C_v - C_p)} \Rightarrow \\ T_2/T_1 &= (V_2/V_1)^{1-\gamma} = (V_1/V_2)^{\gamma-1} \Rightarrow T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \end{aligned}$$

On démontre donc également que (utilisé pour les exercices) :

$$\begin{aligned} T \cdot V^{\gamma-1} &= C^{te} \\ T \cdot P^{(1-\gamma)/\gamma} &= C^{te} \\ P \cdot V^{\gamma} &= C^{te} \end{aligned}$$

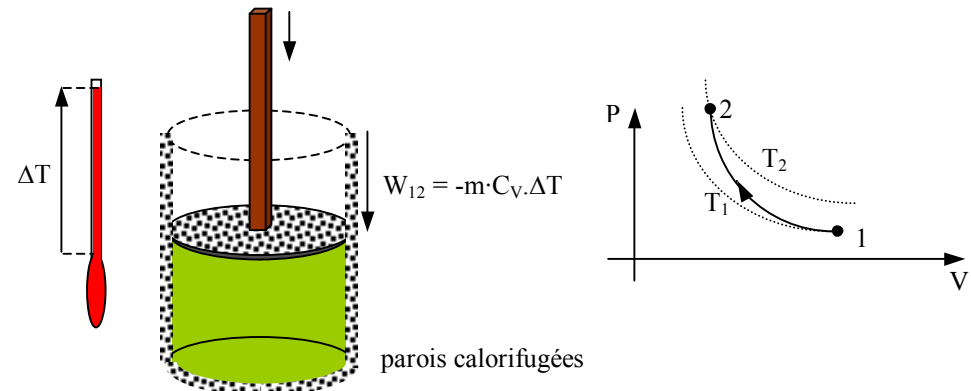
Remarque :

On démontre que le rapport des tangentes des courbes au point 1 vaut :

$$\frac{\text{pente de l'adiabatique}}{\text{pente de l'isotherme}} = C_p/C_v \triangleq \gamma, \text{ or } C_p > C_v \text{ donc } \gamma > 1 : \text{ une adiabatique est plus}$$

"raide" qu'une isotherme. ($\gamma = 1,4$ pour un gaz parfait)

3.4



$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= 0 \\ W_{12} &= -m \cdot c_v \cdot \Delta T = -\Delta U \end{aligned}$$

Avec $PV = nRT$ et notant $\gamma \triangleq C_p/C_v$ on démontre en plus que (utile pour les exercices) :

$$\begin{aligned} T \cdot V^{\gamma-1} &= C^{te} \\ T \cdot P^{(1-\gamma)/\gamma} &= C^{te} \\ P \cdot V^{\gamma} &= C^{te} \end{aligned}$$

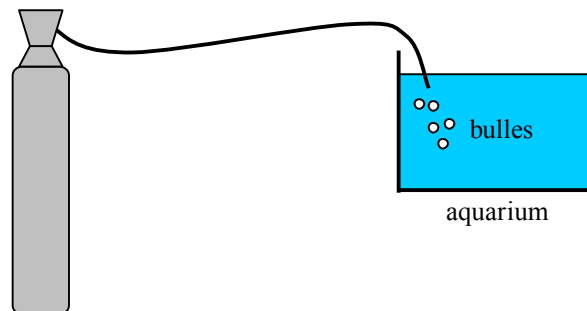
Exercices 2, 3, 4 et 5.

Exercices sur le travail, la chaleur et l'énergie interne des gaz parfaits.

Notez bien que ces exercices font parti intégrante du cours et doivent être résolus au fur et à mesure de leur apparition dans le cours. Ils permettent de bien assimiler les concepts abordés dans chaque paragraphe et de se donner quelques ordres de grandeur. Ils sont parfaitement adaptés au paragraphe étudié. Les données numériques sont issues de différents ouvrages. Il n'est pas certain qu'elles soient exactes à la décimale près...de toute façon la physique est une science qui modélise, et donc qui fait des approximations ! Cela nous suffira amplement !

Exercice 1 : volume utile d'une bonbonne de gaz sous pression

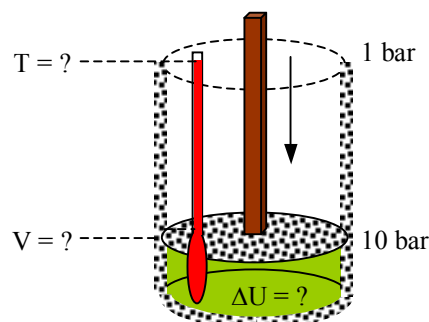
On dispose d'une bouteille de gaz carbonique (CO_2) de 0,5 L comprimée à 2 bars (≈ 2000 hPa) destinée à l'aquariophilie (alimentation des plantes aquatiques). La sortie de la bouteille est reliée à un tuyau qui plonge à environ 1 cm en dessous de la surface de l'eau d'un aquarium. Quelle quantité de CO_2 peut-on en extraire si on ouvre lentement la bouteille ?



Rép : 0,5 litre seulement.

Exercice 2 : compression adiabatique.

On effectue une compression de 1 bar à 10 bars d'1 litre d'air (G.P.) pris initialement à la température ambiante (20°C). Cette compression est suffisamment rapide pour que le récipient renfermant l'air n'ait pas le temps d'évacuer la chaleur pendant la compression. On donne $\gamma \approx 1,40$, $r \approx 287 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $c_v \approx 720 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ pour l'air.

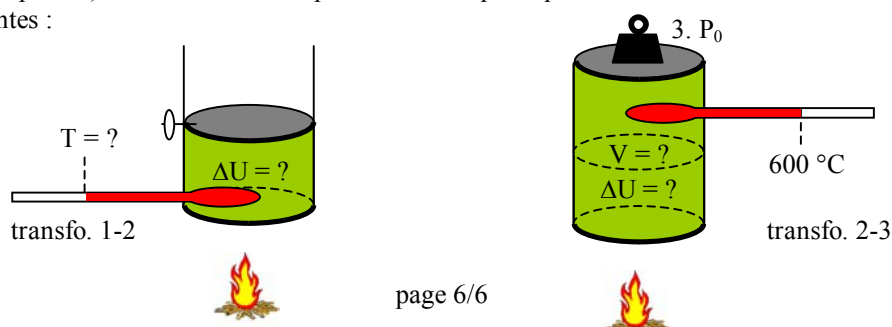


1. Calculer la température finale de la masse d'air.
2. Déduisez en son volume final et sa variation d'énergie interne.

Rép : 1 : 293°C ; 2 : 0,2 L ; 236 J.

Exercice 3 : quelques calculs simples.

Un volume d'air (gaz parfait) de 20 litres à la pression atmosphérique $P_0 \approx 1013$ hPa et à $T_0 \approx 0^\circ\text{C}$ subit les deux transformations suivantes :



transformation 1-2 : compression isochore. L'air est chauffé jusqu'à ce que sa pression soit égale à 3Po.

transformation 2-3 : expansion isobare. L'air est chauffé jusqu'à ce que sa température atteigne 600 °C.

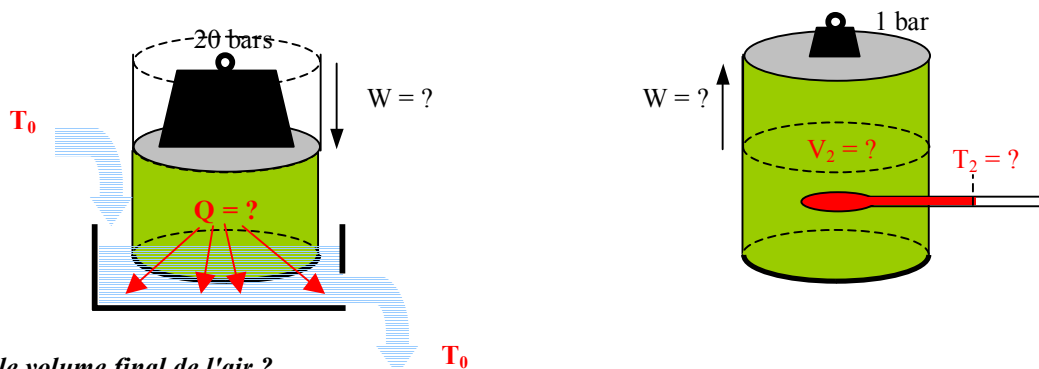
On donne pour l'air : masse molaire $M \approx 29 \text{ g/mole}$, $C_v \approx 708 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, $\gamma \approx 1,40$ et $R \approx 8,32 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

1. *Quelle est la température atteinte par l'air à la fin de la transformation 1-2 ?*
2. *Calculez la masse m d'air et déduisez - en la variation d'énergie interne de l'air dans la transformation 1-2.*
3. *Quel est le volume occupé par l'air à la fin de la transformation 2-3 ?*
4. *Calculez la variation d'énergie interne de l'air dans la transformation 2-3.*

Rép : 1 : 819 K ; 2 : 26g ; 10,0 kJ 3 : 21,3 L ; 4 : 985 J.

Exercice 4 : Compression et travail.

On comprime isothermiquement jusqu'à la pression de 20 bars 1m³ d'air se trouvant initialement dans les conditions normales (rappel : $T_0 \approx 273 \text{ K}$, $P_0 \approx 1013,25 \text{ hPa}$). On admet que l'air se comporte comme un gaz parfait ($R \approx 8,32 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$)



1. *Quel est le volume final de l'air ?*
2. *Calculez le travail de compression et la quantité de chaleur cédée par le gaz au milieu extérieur.*

La masse d'air est ramenée à la pression $P_2 \approx 1 \text{ bar}$ par une détente adiabatique ($PV^\gamma = C^{\text{te}}$ avec $\gamma \approx 1,42$ pour l'air).

3. *Déterminez le volume V_2 et la température T_2 du gaz après la détente.*
4. *Calculez le travail fourni au milieu extérieur et comparez - le au travail fourni au gaz pendant la compression isotherme. Interprétez les résultats en utilisant le diagramme de Clapeyron.*

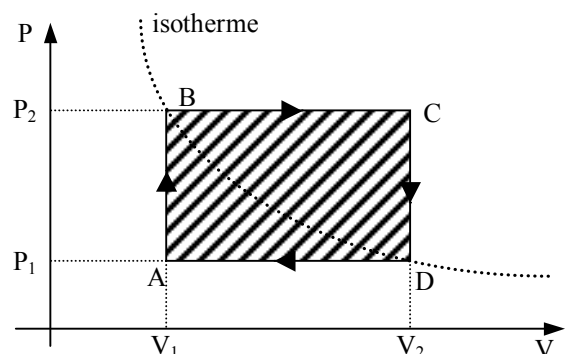
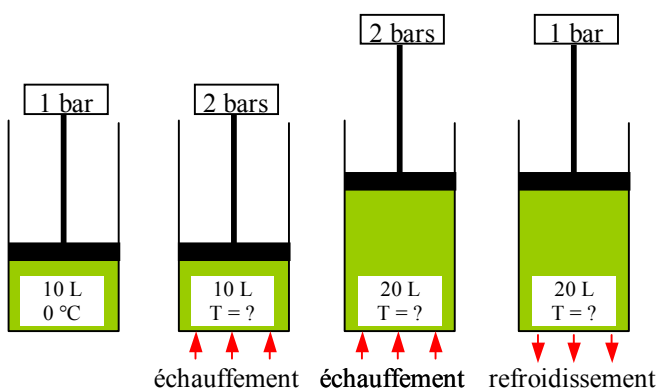
Rép : 1 : 50 L ; 2 : 304 kJ ; -304 kJ ; 3 : 412 L ; 113 K 4 : -142 kJ.

Exercice 5 : cycle, travail et chaleur.

Une certaine masse d'air est enfermée dans un corps de pompe dans les conditions initiales (point A en coordonnées de Clapeyron) $P_1 \approx 1 \text{ bar}$, $V_1 \approx 0,010 \text{ m}^3$, $T_1 \approx 273 \text{ K}$. On lui fait subir une série de transformations représentées par le rectangle ABCD ci - dessous. L'ordonnée de B est $P_2 = 2 \cdot P_1$, l'abscisse de D est $V_2 = 2 \cdot V_1$.

On donne :

- chaleur massique de l'air à pression constante : $C_p \approx 992 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$;
- constante des gaz parfaits $R \approx 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.
- $C_p/C_v \triangleq \gamma \approx 1,42$;
- Masse molaire de l'air $M \approx 29 \text{ g/mole}$.



1. *Calculez le travail échangé au cours du cycle ABCD.*
2. *Déterminez la température de l'air dans les états B, C et D.*
3. *Calculez la masse d'air m mise en jeu et déduisez - en les quantités de chaleur mises en jeu pendant les transformations AB, BC, CD et DA.*

Rép : **1** : -1,00 kJ ; **2** : 546 K ; 1092 K ; 546 K ; **3** : 12,8 g ; 2,44 kJ ; 6,92 kJ ; -4,88 kJ ; -3,46 kJ