MECANIQUE

0. – Résumé du cours de Première

- Cinématique et Dynamique du point matériel
- Énergétique du point matériel et du solide en translation

0.1. Cinématique et Dynamique du Point matériel

0.1.1. Relativité du mouvement

La notion de mouvement est relative. Il est indispensable de préciser par rapport à quel solide de référence (ou **référentiel**) est étudié un mouvement.

0.1.2. Position d'un point

La position d'un point mobile M, à l'instant t, dans un repère cartésien (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) lié à un référentiel est donnée par ses **coordonnées** : x, y, z.

Le **vecteur position** du point M est : $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

Les **équations horaires** du mouvement du point M sont données par :

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

0.1.3. Trajectoire d'un point

La **trajectoire** d'un point mobile M dans un repère donné est la **courbe** formée par l'ensemble des positions successives du point M dans ce repère.

La trajectoire d'un point mobile **dépend du référentiel choisi**.

L'**équation de la trajectoire** d'un point dans un repère donné est une relation entre les coordonnées de ce point **indépendante du temps** : $f(x, y, z) = 0$.

0.1.4. Abscisse curviligne

Dans un repère donné, on considère un point mobile M qui se déplace sur une trajectoire T. Sur cette trajectoire, on choisit conventionnellement une origine Ω, un sens positif et une unité de longueur.

L'**abscisse curviligne** du point mobile M est la valeur algébrique de l'arc orienté ΩM :

$$s = \overline{\text{arc}}\,\Omega M.$$

L'**équation horaire** du mouvement du point M sur la trajectoire T est donnée par :

$$s = s(t).$$

0.1.5. Vecteur vitesse

0.1.5.1. Vitesse moyenne

La vitesse moyenne v_{moy} d'un point mobile pendant un trajet donné est le quotient de la distance parcourue Δl par la durée Δt du trajet :

$$v_{moy} = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

◆ **Unités SI :**
- Δl en mètre (m)
- Δt en seconde (s)
- v en mètre par seconde (m/s ou $m \cdot s^{-1}$)

◆ **Dimension :** LT^{-1}

0.1.5.2. Vitesse instantanée algébrique

La **vitesse instantanée algébrique** v_{t0} d'un point mobile à l'instant t_0 est la valeur de la fonction dérivée de l'abscisse curviligne par rapport au temps, pour la valeur t_0 de la variable temps :

$$v_{t0} = \left[\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t0}$$

0.1.5.3. Vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse** d'un point mobile M est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

Expression analytique du vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{k}$$

ou, en utilisant la notation des mécaniciens ($\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ = dérivée de x par rapport au temps t),

$$\vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}$$

Les **caractéristiques** du vecteur vitesse d'un point mobile M sur une trajectoire T , à l'instant t, sont :
- **direction** : celle de la tangente à la trajectoire au point occupé par M à l'instant t,
- **sens** : celui du mouvement à cet instant,
- **norme** : égale à la vitesse instantanée (notée $\| \vec{v} \|$ ou plus simplement v)

0.1.5.4. Détermination d'un vecteur vitesse sur un document enregistré

Sur le document, la position du point mobile M est marquée à des intervalles de temps réguliers de durée Δt.
Le mobile est au point M_i à l'instant t_i.
Le vecteur vitesse du point mobile M à l'instant t_i est pratiquement donné par :

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{i}}} = \frac{\overrightarrow{M_{\mathrm{i-1}}M_{\mathrm{i+1}}}}{t_{\mathrm{i+1}} - t_{1-1}} = \frac{\overrightarrow{M_{\mathrm{i-1}}M_{\mathrm{i+1}}}}{2\Delta t}$$

0.1.6. Mouvements particuliers

La trajectoire d'un **mouvement rectiligne** est une droite.
La trajectoire d'un **mouvement circulaire** est un cercle.
Lorsqu'un point mobile est animé d'un **mouvement uniforme**, la norme de son vecteur vitesse est constante.
Lorsqu'un point mobile est animé d'un **mouvement rectiligne et uniforme**, son vecteur vitesse est constant (en direction, en sens et en norme).
Au cours d'un **mouvement de translation** d'un solide, à chaque instant, tous les points du solide ont le même vecteur vitesse.
Au cours d'un **mouvement de rotation** d'un solide autour d'un axe fixe, tous les points du solide ont des trajectoires circulaires dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation et centrées sur cet axe.

0.1.7. Centre d'inertie

Le **barycentre** d'un système de n points M_i, chacun d'eux étant respectivement affecté d'un coefficient α_i est le point G tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^n \alpha_i \cdot \overrightarrow{OM_i}}{\sum_1^n \alpha_i}$$

Un solide (S) peut être considéré comme un ensemble de n points matériels M_i de masses respectives m_i. Le **centre d'inertie** (ou **centre de masse**) d'un solide (S) de masse m est le point G tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^n m_i \cdot \overrightarrow{OM_i}}{m}} \qquad \text{avec } m = \sum_1^n m_i$$

0.1.8. Principe de l'inertie

Il existe au moins un repère dans lequel le centre d'inertie d'un système matériel quelconque isolé a les propriétés suivantes :

- s'il est en mouvement, celui-ci est alors rectiligne et uniforme ;
- s'il n'est pas en mouvement, il reste immobile.

0.1.9. Repère galiléen

0.1.9.1. Définition

On appelle repères galiléens, les repères dans lesquels le principe de l'inertie est vérifié.

0.1.9.2. Exemples

Le **repère de Copernic** (origine : centre d'inertie du système solaire ; axes dirigés vers trois étoiles lointaines) est considéré comme galiléen.
Le **repère géocentrique** (origine : centre de la Terre ; axes dirigés vers trois étoiles lointaines) est approximativement galiléen pour l'étude des satellites terrestres.

0.1.10. Vecteur quantité de mouvement

0.1.10.1. Définition

Le vecteur quantité de mouvement d'un solide est le produit de la masse de ce solide par le vecteur vitesse de son centre d'inertie G:

$$\vec{p} = m \cdot \overrightarrow{v_G}$$

◆ **Unités SI :**

- m en kilogramme (kg)
- v_G en mètre par seconde (m/s)
- p en kilogramme mètre par seconde (kg·m/s)

◆ **Dimension :** LMT^{-1}

◆ **Remarques :**

- Le vecteur quantité de mouvement dépend du référentiel choisi.
- Le vecteur quantité de mouvement d'un solide dépend du mouvement de translation et non du mouvement de rotation de ce solide.
- Le vecteur quantité de mouvement d'un système formé de plusieurs parties est égal à la somme vectorielle des quantités de mouvements de chaque partie de ce système.

0.1.10.2. Conservation

Le vecteur quantité de mouvement d'un système isolé dans un repère galiléen se conserve, quels que soient les événements se produisant à l'intérieur du système.
Si deux parties d'un système isolé dans un repère galiléen sont en interaction, la variation du vecteur quantité de mouvement de l'une des parties est opposée à la variation du vecteur quantité de mouvement de l'autre partie.

0.1.11. Vecteur accélération

0.1.11.1. Définition

Le **vecteur accélération** d'un point mobile *M* est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse du point *M*

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$$

- **Unités SI :** *a* en mètre par seconde carrée (m/s²)
- **Dimension :** LT^{-2}
- **Remarques :** Lorsqu'un point mobile est animé d'un **mouvement rectiligne et uniforme**, son vecteur accélération est le vecteur nul.

0.1.11.2. Expression analytique du vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\cdot\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\cdot\vec{k}$$

ou, en utilisant la notation des mécaniciens ($\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ = dérivée seconde de *x* par rapport au temps *t*),

$$\vec{a} = \ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\cdot\vec{j} + \ddot{z}\cdot\vec{k}$$

0.1.11.3. Détermination d'un vecteur accélération sur un document par étincelage

Le vecteur accélération du point mobile *M* à l'instant t_i est pratiquement donné par :

$$\overrightarrow{a_i} = \frac{\overrightarrow{v_{i+1}} - \overrightarrow{v_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{1-1}} = \frac{\overrightarrow{v_{i+1}} - \overrightarrow{v_{i-1}}}{2\Delta t}$$

0.1.12. Principe des actions réciproques

Lorsqu'un corps *A* exerce sur un corps *B* une action mécanique caractérisée par une force $\vec{F}_{A\to B}$, alors le corps *B* exerce sur le corps *A* une action caractérisée par une force $\vec{F}_{B\to A}$. Quel que soit l'état de repos ou de mouvement des corps *A* et *B*, on a : $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$;

0.1.13. Relation fondamentale de la dynamique

Dans un repère galiléen, un point matériel *M* de masse *m*, soumis à des actions mécaniques modélisables par une force $\vec{F}$, subit une accélération $\vec{a}$ telle que :

$$\boxed{\vec{F} = m\cdot\vec{a}}$$

- **Unités SI :**
- *F* en newton (N)
- *m* en kilogramme (kg)
- *a* en mètre par seconde carrée (m/s²)

0.1.14. Théorème du centre d'inertie

Dans un repère galiléen, un solide (*S*) de masse *m* et de centre d'inertie *G*, soumis à des actions mécaniques modélisables par des forces extérieures $\vec{F}_{ext}$, a un mouvement tel que :

$$\boxed{\sum_{(S)} \overrightarrow{F_{ext}} = m\cdot\overrightarrow{a_G}}$$

0.2. Énergétique du point matériel et du solide en translation

0.2.1. Travail des forces

0.2.1.1. Travail élémentaire d'une force

Le travail dW d'une force $\vec{F}$ lorsque son point d'application subit un déplacement $\overrightarrow{d\ell}$ faisant un angle α avec $\vec{F}$ est donné par :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = F \cdot d\ell \cdot \cos \alpha$$

◆ **Unités SI :**
- F en newton (N)
- $d\ell$ en mètre (m)
- dW en joule (J)

◆ **Dimension :** L^2MT^{-2}

0.2.1.2. Travail d'une force constante

Le travail d'une force constante s'exprime par le produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement :

$$W_{MN}\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$$

Le **travail du poids** $\vec{P} = m \times \vec{g}$ d'un solide de masse m pour un déplacement de A vers B est :

$$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = -m \cdot g \cdot (z_B - z_A)$$

0.2.1.3. Travail d'une force non constante

Le travail de la force $\vec{F}$ exercée par un ressort, de raideur k, lorsque l'abscisse de l'extrémité du ressort passe de la valeur x_A à la valeur x_B est :

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

0.2.1.4. Force conservative

Une force est **conservative** si son travail ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de la position des points de départ et d'arrivée.

◆ **Exemples :**
- le poids, la force exercée par un ressort sont des forces conservatives ;
- une force de frottement, une force musculaire sont des forces non-conservatives.

0.2.2. Énergie cinétique

0.2.2.1. Notion

L'énergie cinétique est l'énergie que possède un système du fait de son mouvement, par exemple un marteau qui frappe un clou, un jet d'eau qui arrive sur l'auget d'une turbine.

0.2.2.2. Énergie cinétique d'un point matériel

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ est :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

◆ **Unités SI :**
- m en kilogramme (kg)
- v en mètre par seconde (m/s)
- E_c en joule (J)

◆ **Dimension :** L^2MT^{-2}

0.2.2.3. Énergie cinétique d'un solide

L'énergie cinétique d'un solide est la somme des énergies cinétiques de chacun de ses points matériels le constituant :

$$E_c = \sum\left(\frac{1}{2}\cdot m_i \cdot v_i^2\right)$$

0.2.2.4. Énergie cinétique d'un solide en translation

L'énergie cinétique d'un solide de masse m en mouvement de translation de vitesse $\vec{v}$ est :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\cdot m \cdot v^2}$$

0.2.3. Théorème de l'énergie cinétique

0.2.3.1. Pour un solide

Dans un repère galiléen, la **variation d'énergie cinétique** d'un solide entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme algébrique des **travaux de toutes les forces extérieures**, appliquées à ce solide entre les deux instants considérés.

$$\boxed{E_{c2} - E_{c1} = \sum\left[W_{12}\left(\vec{F}_{ext}\right)\right]}$$

0.2.3.2. Pour un système déformable

Dans un repère galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un **système** entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces (intérieures et extérieures) qui lui sont appliquées entre ces deux instants.

$$\boxed{E_{c2} - E_{c1} = \sum\left[W_{12}\left(\vec{F}_{int}\right)\right] + \sum\left[W_{12}\left(\vec{F}_{ext}\right)\right]}$$

0.2.4. Énergie potentielle

0.2.4.1. Notion

L'énergie potentielle est l'énergie que possède, "en réserve", un système déformable, par exemple un ressort tendu, un gaz comprimé, les "poids" remontés d'une horloge, l'eau d'un barrage élevé, une charge électrique à l'intérieur d'un condensateur.

0.2.4.2. Variation de l'énergie potentielle

La variation de l'énergie potentielle d'un système entre deux états est égale au travail des forces conservatives intérieures au système.

L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante près.

On appelle **état de référence**, l'état dans lequel le système a une énergie potentielle nulle.

0.2.4.3. Énergie potentielle d'élasticité

Un ressort de raideur k, de longueur naturelle ℓ_0, dont la longueur a été portée à ℓ (par compression ou distension) possède l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\cdot k \cdot (\ell - \ell_0)^2}$$

Dans l'état de référence, le ressort a sa longueur naturelle.

0.2.4.4. Énergie potentielle de pesanteur

Le système {objet, Terre} dont l'objet de masse m est à une altitude z, en un point où le vecteur pesanteur est $\vec{g} = g_z\cdot\vec{k}$, possède une énergie potentielle :

$$\boxed{E_p = -m \cdot g_z \cdot (z - z_0)}$$

Dans l'état de référence, l'objet est à l'altitude z_0.

0.2.4.5. Énergie potentielle électrique

Le système {particule, condensateur} où la particule de charge q est placée en point d'ordonnée y où le vecteur champ électrique est $\vec{E} = E_y \cdot \vec{j}$, possède une énergie potentielle :

$$\boxed{E_p = -q \cdot E_y \cdot (y - y_0)}$$

Dans l'état de référence, la particule a une ordonnée y_0.

0.2.4.6. Relation entre énergie potentielle et force conservative

Lorsque l'énergie potentielle E_p d'un système est due à une force $\vec{F}$ conservative intérieure au système, on dit que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel et l'on a la relation :

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dx}}$$

0.2.5. Énergie mécanique totale

0.2.5.1. Définition

L'énergie mécanique totale d'un système est la somme de ses énergies cinétique et potentielle :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

0.2.5.2. Système conservatif

L'énergie mécanique totale d'un système isolé et sans frottement est constante.

0.2.5.3. Système dissipatif

Lorsqu'un système isolé évolue avec frottement, son énergie mécanique diminue.
Le travail des frottements est alors transformé en **chaleur**.