MECANIQUE

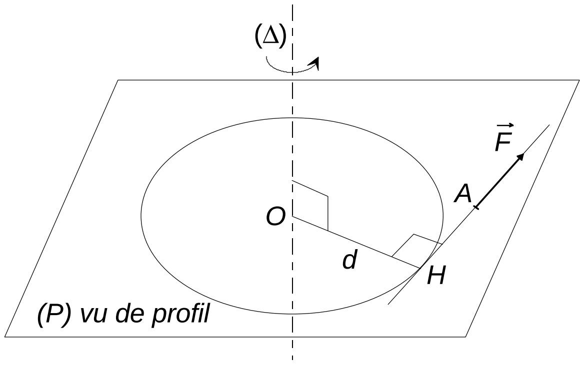
2. – Dynamique et Énergétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

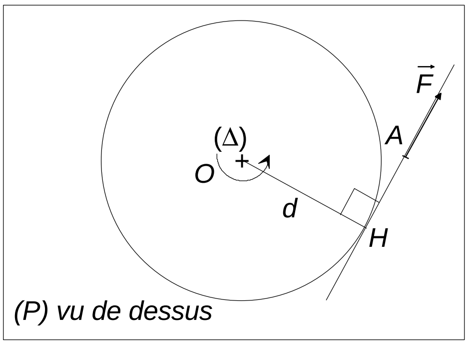
- Moment d'une force M – Couple Γ (M21)
- Moment cinétique L – Moment d'inertie J (M22)
- Théorème du moment cinétique (M23)
- Travail et puissance des forces agissant sur un solide en rotation (M24)
- Énergie cinétique et sa variation (M25)

2.1. Moment d'une force ; moment d'un couple

2.1.1. Moment d'une force

2.1.1.1. Force orthogonale à l'axe





Considérons une force $\vec{F}$, de point d'application A, située dans un plan *(P)* et un axe (Δ) de rotation orienté, perpendiculaire à *(P)*. On appelle bras de levier de la force F la distance $d = OH$ de la droite d'action à l'axe de rotation.

L'effet de rotation autour de l'axe (Δ) de la force $\vec{F}$ dépend de l'intensité de cette force et de la longueur de son bras de levier d.

- **Définition :**

On appelle moment $M_\Delta(\vec{F})$, par rapport à l'axe (Δ), de la force $\vec{F}$, le produit de la valeur F de la force par son bras de levier d, affecté d'un signe + si l'action de $\vec{F}$ se fait dans le sens de rotation choisi autour de (Δ), *ou* - dans le cas contraire.

$$\boxed{M_\Delta\left(\vec{F}\right) = \pm F \cdot d}$$

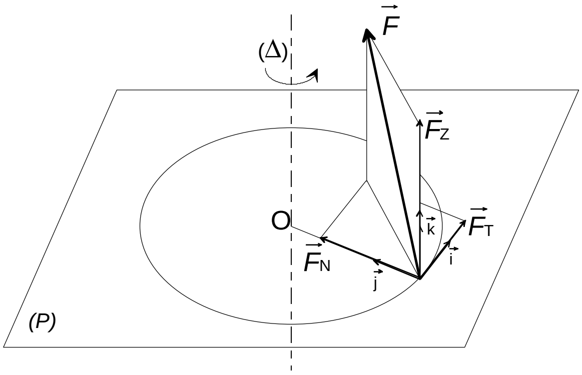
◆ **Unités :**

- F en (N)
- d en (m)
- $M_\Delta(\vec{F})$ en N·m

◆ **Remarques :**

- la valeur du bras de levier d ne change pas si la force $\vec{F}$ glisse le long de sa droite d'action : donc la valeur du moment $M_\Delta(\vec{F})$ ne dépend pas de la position du point d'application A sur la droite d'action ;
- le moment $M_\Delta(\vec{F})$ est une grandeur **algébrique** ;
- en **régime statique** (vitesse de rotation nulle ou constante), la somme algébrique des moments des actions appliqués à un solide est nulle : $\sum M = 0$.

2.1.1.2. Force quelconque



Le vecteur force $\vec{F}$ est la somme de ses composantes suivant la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N + \vec{F}_Z$ avec :

- $\vec{F}_T$: tangentielle à la trajectoire,
- $\vec{F}_N$: normale à l'axe Δ,
- $\vec{F}_Z$: parallèle à l'axe (Δ).

$M_\Delta(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}_T) + M_\Delta(\vec{F}_N) + M_\Delta(\vec{F}_Z)$. Or

$M_\Delta(\vec{F}_N) = 0$ car la force est passe par à l'axe

$M_\Delta(\vec{F}_Z) = 0$ car la force est parallèle à l'axe.

Seule la composante $\vec{F}_T$ a une action de rotation autour de l'axe (Δ)

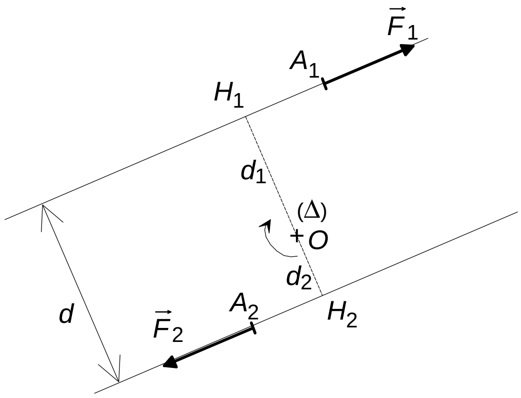
$$\boxed{M_\Delta(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}_T)}$$

2.1.2. Moment d'un couple

2.1.2.1. Couple de deux forces

◆ **Définition :**

Deux forces localisées (A_1, $\vec{F}_1$) et (A_2, $\vec{F}_2$) dont les droites d'action sont parallèles, ayant des sens contraires et des intensités égales forment un couple.



◆ **Remarques**

- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$
- la distance d s'appelle **bras de levier** du couple
- un couple exerce une action de **rotation** et non de translation

◆ **Moment du couple (A_1, $\vec{F}_1$) et (A_2, $\vec{F}_2$) :**

$$\left| M_\Delta(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \right| = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = F_1 \cdot (d_1 + d_2) = F \cdot d$$

Le moment d'un couple de deux forces est égal au produit de la valeur de l'une des forces par le bras de levier.

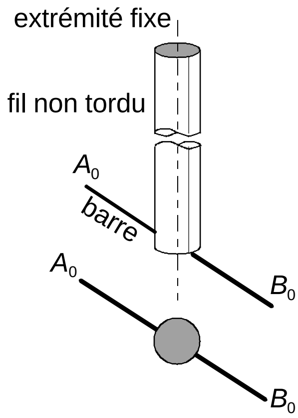
◆ **Remarques :**

- le moment d'un couple est indépendant de la position de l'axe de rotation ;
- comme le moment d'une force, le moment d'un couple est défini algébriquement ;
- des actions réparties sur un arbre en rotation peuvent être modélisées par un couple.

2.1.2.2. Couple de torsion

Sous l'effet d'un couple $(\vec{F}_A, \vec{F}_B)$, de moment $M_\Delta(\vec{F}) = F_A \cdot AB$, un fil cylindrique en métal se tord d'un angle α appelé **angle de torsion.**
À l'équilibre, le fil exerce sur la barre un **couple de torsion** de moment $G = -M_\Delta(F)$.
Dans le domaine d'élasticité du métal, le moment Γ du couple de torsion est proportionnel à l'angle de torsion α :

$$\boxed{\Gamma = -C \cdot \alpha}$$

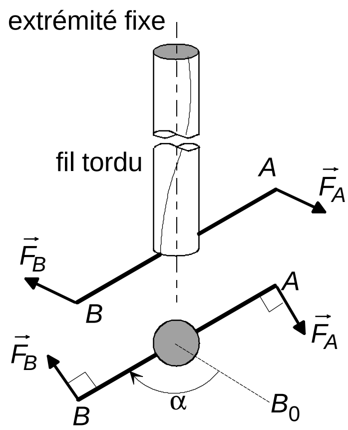


- Γ : couple de torsion du fil en N·m
- α : angle de torsion en rad
- C : constante de torsion du fil en N·m/rad

◆ **Remarque**

Pour un fil cylindrique de diamètre d et de longueur ℓ, la constante de torsion s'écrit : $C = k \cdot \frac{d^4}{\ell}$ avec $k = G \cdot \frac{\pi}{32}$

G s'appelle *coefficient d'élasticité transversale* ou *module de Coulomb* et dépend du matériau.



2.1.2.3. Ordres de grandeur

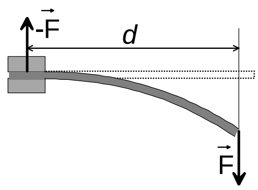
couple	valeur (N·m)
ouverture d'un robinet	≈ 0,1
serrage de l'écrou d'une roue	≈ 20
moteur d'une voiture	≈ 200

2.1.3. Mesurage d'un moment

2.1.3.1. Clé dynamométrique

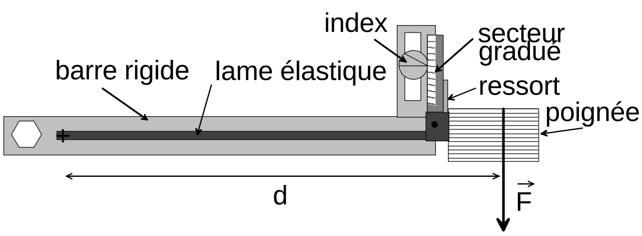
◆ **Lame élastique**

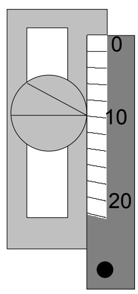
Si l'on exerce une force F à l'extrémité d'une lame élastique dont l'autre extrémité est fixe, la lame est soumise à un couple, de bras de levier d et de moment $M = F \cdot d$. Elle transmet ce couple à son support et subit une torsion d'autant plus importante que M est grand.



◆ **Clé**

La clé comporte une barre rigide munie d'un index réglable et une lame élastique fixée à son extrémité à la barre rigide et munie d'une poignée à l'autre extrémité. Lorsqu'une force est appliquée sur la poignée, celle-ci entraîne la lame élastique et un secteur gradué articulé, maintenu en appui sur l'index par un petit ressort. Pour choisir un couple de serrage, on positionne l'index face à la graduation correspondant à la valeur choisie. Lors du serrage, la lame se tord et le secteur gradué glisse le long de l'index. Lorsque le



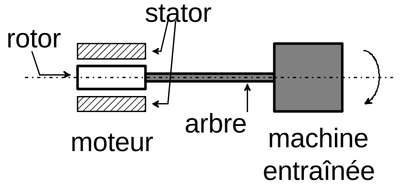


couple choisi est atteint, il n'est plus retenu par l'index, bascule et vient taper sur la lame élastique.

2.1.4. Couple moteur

On appelle **machine tournante** le système formé par le rotor du moteur, l'arbre de transmission et la machine entraînée ; ce système est un **solide en rotation**. Le stator du moteur applique à ce système un couple appelé **couple moteur** de moment M_m (>0). D'autre part, en général, ce système est soumis à un **couple de frottements** de moment M_f (<0) et à un **couple résistant**, opposé au couple utile, de moment M_r (<0).

À vitesse de rotation constante, la somme des moments appliqués au système est nulle.



$$M_m + M_f + M_r = 0$$

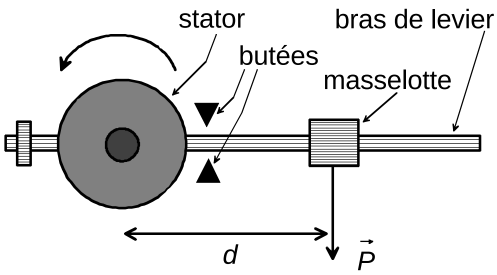
Si les frottements sont négligeables, $M_m + M_r = 0$ ou $M_m = -M_r$

En mesurant le moment du couple résistant M_r on en déduit le moment du couple moteur M_m.

Pour ceci, on peut utiliser, comme machine entraînée :

- un **frein à poudre** muni d'un capteur de moment, ou
- une **dynamo-balance**, qui débite un courant dans une charge ; son stator, dont le mouvement de rotation est limité par deux butées solidaires du bâti, est muni d'un bras de levier sur lequel peut coulisser une masselotte de poids P. On règle l'équilibre en plaçant la masselotte à la distance d de l'axe ; le moment du couple moteur a alors la même valeur que le moment du poids P :

$$M_m = P \cdot d$$

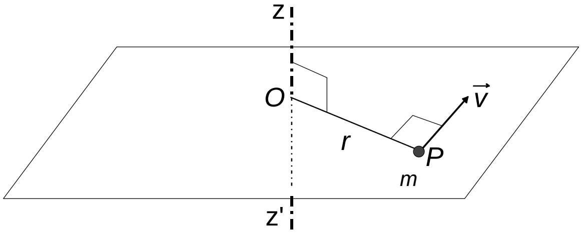


2.2. Moment cinétique *L* ; moment d'inertie *J*

2.2.1. Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe

Considérons un point matériel *P* de masse *m* et de vitesse $\vec{v}$ et un axe orienté *z'z* orthogonal au vecteur $\vec{v}$. Soit *r* la distance du point *P* à l'axe *z'z*.

Soit $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ le vecteur quantité de mouvement du point matériel *P* :



◆ **Définition :**

Le **moment cinétique** du point matériel *P* par rapport à l'axe *z'z* est égal au moment, par rapport à l'axe *z'z*, du vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$:

$$\boxed{L_z = r \cdot p = r \cdot m \cdot v}$$

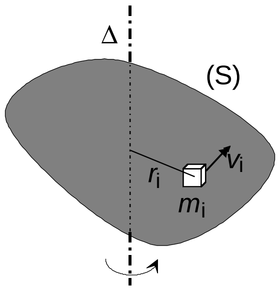
◆ **Unités :**

- r en (m)
- m en (kg)
- v en (m/s)
- L_z en kg·m²/s

2.2.2. Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe de rotation

Considérons un solide (S) mobile en rotation autour d'un axe (Δ), de vitesse angulaire ω. En décomposant le solide en petits éléments de masse m_i, de vitesse v_i, placé à la distance r_i de l'axe selon le schéma ci-contre, on peut définir le moment cinétique du solide par la relation : $L_\Delta = \sum_i r_i \cdot m_i \cdot v_i$

Or la vitesse de l'élément placé à cette distance r_i de l'axe (Δ) est donnée par : $v_i = r_i \cdot \omega$. D'où $L_\Delta = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega$



$$\boxed{L_\Delta = \omega \cdot \sum_i m_i \cdot r_i^2}$$

◆ **Unités**

- ω en rad/s
- m en (kg)
- r en (m)
- L_Δ en kg·m²/s

2.2.3. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

Considérons un solide (S) mobile en rotation autour d'un axe (Δ), supposé décomposé en petits éléments de masse m_i placé à la distance r_i de l'axe (voir schéma ci-dessus).

2.2.3.1. Définition

On appelle **moment d'inertie** du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) la grandeur :

$$\boxed{J_\Delta = \sum_i m_i \cdot r_i^2}$$

◆ **Unités :**

- m en (kg)
- r en (m)
- J_Δ en (kg·m²)

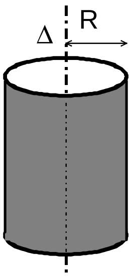
◆ **Remarque :**

D'après ce qui précède : $\boxed{L_\Delta = \omega \cdot J_\Delta}$

2.2.3.2. Moment d'inertie d'une jante ou d'un manchon cylindrique mince

Une jante de masse M et de rayon R a, par rapport à son axe de révolution (Δ), un moment d'inertie donné par :

$$\boxed{J_\Delta = M \cdot R^2}$$



2.2.3.3. Moment d'inertie d'un disque ou d'un cylindre plein

Un disque homogène de masse M et de rayon R a, par rapport à son axe de révolution (Δ), un moment d'inertie donné par :

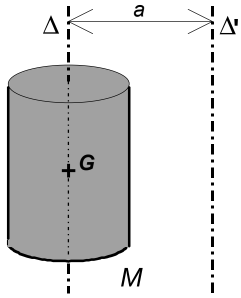
$$\boxed{J_\Delta = \frac{1}{2} M \cdot R^2}$$

◆ **Remarque :** le moment d'inertie d'une **tige mince homogène** de masse m et de longueur l, par rapport à un axe perpendiculaire en son centre est donné par **:** $J_\Delta = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$ **.**

2.2.3.4. Théorème de Huyghens

Ce théorème permet de calculer le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe (Δ') parallèle à l'axe principal d'inertie (Δ) qui passe par le centre d'inertie G :

$$J_{\Delta'} = J_\Delta + a^2 \cdot M$$



avec

- J_Δ : moment d'inertie par rapport à l'axe principal d'inertie,
- $J_{\Delta'}$: moment d'inertie par rapport un axe (Δ') parallèle à (Δ),
- a : distance des deux axes,
- M : masse du solide.

2.3. Théorème du moment cinétique

2.3.1. Variation du moment cinétique

2.3.1.1. Cas d'un point matériel en mouvement circulaire autour d'un axe (Δ)

Considérons un point matériel *P* de masse *m* en mouvement circulaire de rayon *r* autour d'un axe (Δ) et soit *v* sa vitesse ; son moment cinétique par rapport à l'axe (Δ) est $L_\Delta = r \cdot p = r \cdot m \cdot v$ (voir M22 §1)

La dérivée, par rapport au temps, du moment cinétique est :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = r \cdot \frac{dp}{dt} = r \cdot m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = J_\Delta \cdot \frac{d\omega}{dt} = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}}$$

avec ω la vitesse angulaire et $\ddot{\theta}$ l'accélération angulaire.

- Si le mouvement est uniforme, *r*, *m*, *v*, ω étant constants, le moment cinétique est constant donc $\frac{dL_\Delta}{dt} = 0$ et $\ddot{\omega}$=0 ; la force exercée sur *P* est radiale ; le moment de cette force, par rapport à (Δ) est nul.
- Si le mouvement est varié ($\ddot{\theta} \neq 0$), le point *P* est soumis à une force $\vec{F}$ telle que $\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N + \vec{F}_Z$ avec (voir figure ch. M21 §1.2) :
  - ∗ $\vec{F}_T$: tangentielle à la trajectoire,
  - ∗ $\vec{F}_N$: normale à l'axe (Δ),
  - ∗ $\vec{F}_Z$: parallèle à l'axe (Δ).

Or d'après le théorème du centre d'inertie, $F_T = m \cdot a_T = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot r \cdot \frac{d\omega}{dt}$

Le moment de $\vec{F}$ par rapport à (D) est égal à $M_\Delta(\vec{F}_T)$ (voir chapitreM21 § 1.2) d'où

$$M_\Delta(\vec{F}) = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

D'où

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = M_\Delta(\vec{F})}$$

2.3.1.2. Cas d'un solide en rotation

En généralisant le résultat précédent, lorsqu'un solide mobile en rotation autour d'un axe (Δ) est soumis à un couple de moment Γ, son moment cinétique varie et sa dérivée par rapport au temps est égale au moment du couple :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = \Gamma}$$

2.3.2. Théorème du moment cinétique

2.3.2.1. Rappels pour un mouvement de translation

Pour modifier le **vecteur vitesse** d'un corps en mouvement de **translation**, on doit exercer une action appelée **force** $\vec{F}$.

◆ **Principe de l'inertie :**

Dans un repère galiléen, le centre d'inertie d'un solide soumis à des forces qui se compensent (ou à aucune force) a un mouvement rectiligne uniforme s'il est en mouvement, et reste au repos s'il est au repos. Donc son vecteur vitesse de son est constant.

◆ **Relation fondamentale de la dynamique :**

Dans un repère galiléen, la somme des vecteurs forces appliqués à un solide est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$$

2.3.2.2. Pour un mouvement de rotation

Pour modifier la vitesse angulaire d'un solide mobile autour d'un axe, on doit exercer un couple de moment *M*.

◆ **Principe de l'inertie**

Dans un repère galiléen, lorsqu'un solide mobile autour d'un axe n'est soumis à aucun couple, ou lorsqu'il est soumis à des couples qui se compensent, sa vitesse angulaire est constante.

◆ **Remarque :**

Un couple qui agit sur un solide mobile autour d'un axe a pour effet de faire varier son moment cinétique.

2.3.2.3. Énoncé du théorème du moment cinétique

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système en **rotation** autour d'un axe (Δ) est égale à la somme des moments par rapport à (Δ) de toutes les forces extérieures :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \cdot \frac{d\omega}{dt} = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} = \sum \Gamma_\Delta}$$

◆ **Unités :**

- J_Δ en (kg·m^2)
- $\ddot{\theta}$ en (rad/s^2))
- Γ en (N·m)

2.3.3. Conservation du moment cinétique

◆ **Rappel : principe de l'inertie pour un système en translation**

Dans un repère galiléen, lorsque la somme des forces extérieures appliquées à un solide mobile en translation est nulle, alors sa quantité de mouvement reste constante ; donc si sa masse est constante, la vitesse de son centre d'inertie reste constante (il est, soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme).

◆ **Pour un système en rotation**

Lorsque la somme des moments des forces ou des couples extérieurs appliqués à un **système** mobile en rotation est nulle, alors le moment cinétique du système reste constant : $L_D = w \cdot J_D = cste$.

◆ **Pour un solide en rotation**

Le moment d'inertie d'un **solide** par rapport à un axe (D) est constant donc lorsque la somme des moments des forces ou des couples extérieurs appliqués à un solide mobile en rotation est nulle, alors sa vitesse angulaire reste constante (le solide est soit au repos, soit en mouvement de rotation uniforme).

2.3.4. Rôle d'un volant

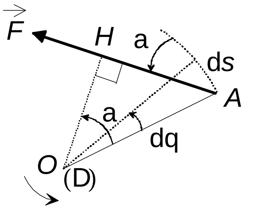
Un volant est un solide mobile en rotation ayant un grand moment d'inertie, entraîné par une machine et destiné à régulariser la marche de l'ensemble.

◆ **Applications :** moteur thermique, laminoir, gyrobus[1]...

[1] S&V n°683 p 108 ; Bordas TCE 66 p 105 ; Hatier 1CDE 79 p 61

2.4. Travail et puissance des forces agissant sur un solide en rotation

2.4.1. Travail d'une force pendant une rotation élémentaire



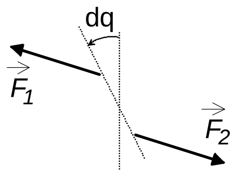
Considérons une force $\vec{F}$ localisée au point A,
$d\theta$ un angle de rotation élémentaire autour d'un axe (Δ) passant par le point O,
dW le travail élémentaire de $\vec{F}$ pendant cette rotation.
L'arc élémentaire décrit pendant cette rotation est $ds = r \cdot d\theta$ avec $r = OA$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos\alpha = F \cdot r \cdot d\theta \cdot \cos\alpha = F \cdot r \cdot \cos\alpha \cdot d\theta$$

$$dW = F \cdot OH \cdot d\theta \qquad \boxed{dW = M_\Delta\left(\vec{F}\right) \cdot d\theta}$$

◆ **Unités :**
- dW en (J)
- $M_\Delta(\vec{F})$ en (N·m)
- $d\theta$ en (rad)

2.4.2. Travail d'un couple pendant une rotation élémentaire



Considérons un couple de deux forces ($\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$), un angle de rotation élémentaire $d\theta$. Le travail élémentaire dW du couple pendant cette rotation est donné par :

$$dW = M_\Delta\left(\vec{F_1}\right) \cdot d\theta + M_\Delta\left(\vec{F_2}\right) \cdot d\theta = \left(M_\Delta\left(\vec{F_1}\right) + M_\Delta\left(\vec{F_2}\right)\right) \cdot d\theta$$

$$\boxed{dW = \Gamma \cdot d\theta}$$

◆ **Unités :**
- dW en (J)
- Γ en (N·m)
- $d\theta$ en (rad)

◆ **Définition :**
Le travail élémentaire d'un couple est le produit de son moment par l'angle élémentaire de rotation.

2.4.3. Travail d'un couple de moment constant pendant une rotation quelconque

Considérons le moment constant Γ d'un couple et θ un angle quelconque de rotation. Le travail W du couple s'exprime par : $W = \sum_i dW_i = \sum_i \Gamma \cdot d\theta_i = \Gamma \cdot \sum_i d\theta_i = \Gamma \cdot \theta$

$$\boxed{W = \Gamma \cdot \theta}$$

◆ **Unités :**
- dW en (J)
- Γ en (N·m)
- $d\theta$ en (rad)

◆ **Définition :**
Le travail d'un couple de moment constant pour une rotation quelconque est égal au produit du moment du couple par l'angle de rotation.

◆ **Remarques :**
- Si Γ et θ sont de même signe, $W > 0$ est un **travail moteur**.
- Si Γ et θ sont de signes contraires, $W < 0$ est un **travail résistant**.

◆ **Rappel**
Dans un mouvement de **translation**, le travail d'une force $\vec{F}$ pour un déplacement $\vec{d}$ est donné par $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

2.4.4. Travail d'un couple de torsion

On rappelle que, dans le domaine d'élasticité, le moment d'un couple de torsion est proportionnel à l'angle de torsion : $\Gamma = -C \cdot \theta$; donc ce moment varie avec l'angle θ et n'est donc pas constant.
On démontre que lorsqu'un fil de torsion passe d'un **état initial tordu** (où son angle de torsion est θ_i) à l'**état final naturel non tordu** ($\theta_f = 0$), le couple de torsion effectue un travail moteur donné par :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \theta_i^2}$$

◆ **Unités :**

- W en (J)
- C en (N·m/rad)
- θ_i en (rad)

◆ **Rappel**

Le travail de la force exercée par un **ressort**, de raideur k, lorsque son allongement passe de x_i à 0 est donné par : $W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_i^2$

2.4.5. Puissance d'un couple

Par définition, la puissance est la dérivée du travail par rapport au temps : $P = \frac{dW}{dt} = \frac{\Gamma \cdot d\theta}{dt} = \Gamma \cdot \frac{d\theta}{dt}$

$$\boxed{P = \Gamma \cdot \omega}$$

◆ **Unités**

- P en (W)
- Γ en (N·m)
- ω en (rad/s)

◆ **Rappel**

La puissance d'une force $\vec{F}$, appliquée à un solide en **translation** à la vitesse $\vec{v}$, est donnée par : $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

◆ **Définition :**

A chaque instant, la puissance d'un couple, appliqué à un solide en rotation, est égale au produit de son moment par la vitesse angulaire.

◆ **Remarques :**

- Si Γ et ω sont de même signe, P >0, le **couple** est **moteur**.
- Si Γ et ω sont de signes contraires, P <0, le **couple** est **résistant**.

2.4.6. Rendement d'une machine

Une machine qui transforme une forme d'énergie quelconque en forme d'énergie quelconque a un rendement exprimé par : $h = \frac{P_{utile}}{P_{absorbée}}$

La **puissance absorbée** est la puissance fournie à la machine par le milieu extérieur.
La **puissance utile** est la puissance fournie par la machine au milieu l'extérieur.
La **puissance dissipée** par les pertes est la différence entre la puissance absorbée et la puissance utile.

2.5. Énergie cinétique et sa variation

2.5.1. Rappel : énergie cinétique d'un solide en translation

◆ **Définition :**

Lorsqu'un un solide, de masse *m*, est en mouvement de translation, à un instant donné, tous ses points ont le même vecteur vitesse. À cet instant, l'énergie cinétique du solide est donnée par :

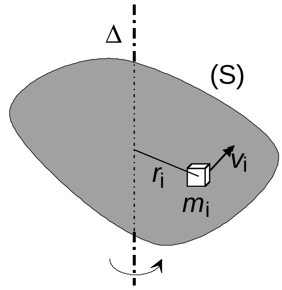
$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2}$$

◆ **Unités :**

- *E*c en (J)
- *m* en (kg)
- v en (m/s)

2.5.2. Énergie cinétique d'un solide en mouvement de rotation

Considérons un solide (*S*) en mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) et ω sa vitesse angulaire. Soit M_i un point de (*S*), $\vec{v}_i$ son vecteur vitesse et m_i sa masse. L'énergie cinétique du solide (S) est la somme des énergies cinétiques de tous ses points : $Ec = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2$



Or pour un mouvement de rotation, $v_i = r_i \cdot \omega$. D'où $Ec = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2$

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2} J_\Delta \cdot \omega^2}$$

◆ **Unités**

- *E*c en (J)
- J_Δ en (kg·m^2)
- ω en (rad/s)

2.5.3. Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

◆ **Énoncé**

Dans un repère galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un solide entre les instants t_1 et t_2 est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces extérieures appliquées à ce solide entre ces deux instants :

$$\boxed{E_{c2} - E_{c1} = \sum \left[W_{12}\left(\vec{F}_{ext}\right) \right]}$$

◆ **Unités :**

- *E*c en (J)
- *W* en (J)

◆ **Remarque :**

Ce théorème est valable pour un mouvement de translation comme pour un mouvement de rotation :

- $\frac{1}{2} m \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right) = \sum \left[W_{12}\left(\vec{F}_{ext}\right) \right]$ pour une translation
- $\frac{1}{2} J_\Delta \cdot \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = \sum \left[W_{12}\left(\vec{F}_{ext}\right) \right]$ pour une rotation