Terminale STL
Physique de Laboratoire et Procédés Industriels

MECANIQUE

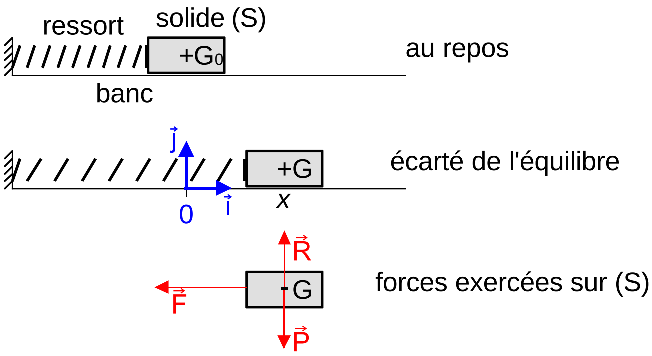
3. – Oscillateurs mécaniques

3.1. Pendule élastique horizontal et de torsion

3.1.1. Exemples d'oscillateurs mécaniques

Un oscillateur est un système animé d'un **mouvement périodique**. Une masse suspendue à un ressort, un pendule de torsion, le balancier d'une horloge, sont des oscillateurs mécaniques

3.1.2. Pendule élastique horizontal



3.1.2.1. Étude dynamique

On considère un ressort de masse négligeable et de raideur k. Á l'une de ses extrémités est fixé un solide (S) mobile de masse m, l'autre extrémité est accrochée à un point d'un banc horizontal sur lequel peut se déplacer le solide (S) sans frottement.
Au repos (le ressort ayant sa longueur naturelle), le solide (S) est en équilibre sous l'action de son poids et de la réaction du banc : $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$
Si l'on écarte le centre d'inertie G du solide de sa position d'équilibre G_0 et qu'on le libère, il se met à osciller autour de G_0 ; pour décrire le mouvement de G, on choisira un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ lié au banc. Le solide (S) est soumis à trois forces :

- son poids $\vec{P}=m\cdot\vec{g}$
- la réaction du banc $\vec{R}$
- l'action du ressort $\vec{F}=-k\cdot x\cdot\vec{i}$

D'après le *théorème du centre d'inertie* : $m\cdot\vec{a}_G=\vec{F}+\vec{R}+\vec{P}$

Par projection dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$:

- sur $\vec{j}$: $R-P=0$
- sur $\vec{i}$: $m\cdot a_G=-k\cdot x$ ou $m\cdot\ddot{x}=-k\cdot x$ avec $\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$

L'équation du mouvement de G est donc une **équation différentielle du second ordre** :

$$\boxed{m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+k\cdot x=0} \text{ ou } \boxed{m\cdot\ddot{x}+k\cdot x=0} \text{ ou } \boxed{\ddot{x}+\frac{k}{m}\cdot x=0}$$

3.1.2.2. Équation horaire

Une **solution** de l'équation différentielle précédente est : $\boxed{x = x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)}$.

En effet en dérivant par rapport au temps t : $\dot{x} = x_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

puis en dérivant une seconde fois : $\ddot{x} = -x_m \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = -\omega^2 \cdot [x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)] = -\omega^2 \cdot x$

En reportant *x* et $\ddot{x}$ dans l'équation différentielle, on obtient : $-\omega^2 \cdot x + \frac{k}{m} \cdot x = 0$ ou $\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) \cdot x = 0$

soit
$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

On appelle :

- x_m : l'**amplitude** du mouvement
- ω : la **pulsation** propre $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$
- T : la **période** propre : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$
- f : la **fréquence** propre $\boxed{f = \frac{1}{T}}$
- j : la **phase** à l'origine des temps

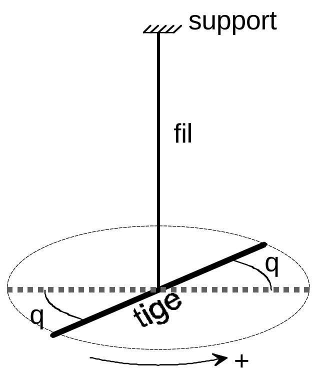
ω, T, f et φ sont des grandeurs indépendantes de l'amplitude x_m du mouvement.

◆ **Unités**

- x et x_m en (m), $\dot{x}$ en (m/s), $\ddot{x}$ en (m/s²)
- k en (N/m)
- m en (kg)
- ω en (rad/s)
- T en (s)
- f en (Hz)
- φ en (rad)

3.1.3. Pendule élastique de torsion

3.1.3.1. Étude dynamique



On considère un pendule de torsion constitué d'un fil, de constante de torsion *C*, et d'une tige fixée en son centre à l'une des extrémités de fil, l'autre extrémité étant fixée à un support. On appelle *J* le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe passant par son centre. Si l'on écarte la tige de sa position d'équilibre et qu'on la libère, elle se met à osciller autour de sa position d'équilibre.

On appelle respectivement θ et $\dot{\theta}$ l'abscisse angulaire et la vitesse angulaire de la tige à l'instant *t*.

La tige est soumise au seul couple de torsion du fil : $\Gamma = -C \cdot \theta$

D'après le théorème du moment cinétique, $J \cdot \ddot{\theta} = \Gamma = -C \cdot \theta$ avec $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

L'**équation différentielle** du second ordre du mouvement de la tige est donc :

$$J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + C \cdot \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{J \cdot \ddot{\theta} + C \cdot \theta = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J} \cdot \theta = 0}$$

3.1.3.2. Équation horaire

Une **solution** de l'équation différentielle précédente est : $\boxed{\theta = \theta_m \cos(\omega \cdot t + \varphi)}$

On appelle :

- ω : la pulsation propre $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}}$

- T : la période propre : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$
- f : la fréquence propre $\boxed{f = \frac{1}{T}}$
- φ : la phase à l'origine des temps

Ces grandeurs sont indépendantes de l'amplitude θ_m du mouvement.

◆ **Unités :**

- θ et θ_m en (rad), $\dot{\theta}$ en (rad/s), $\ddot{\theta}$ en (rad/s²)
- C en (N·m/rad)
- J en (kg·m²)

◆ **Remarque**

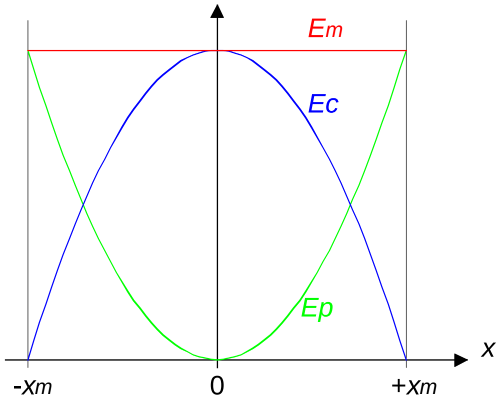
On appelle **oscillateur harmonique** un oscillateur dont le mouvement est déterminé par une équation différentielle du type : $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0}$

3.2. Conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur

3.2.1. Cas d'un pendule élastique horizontal

On considère le pendule élastique horizontal vu précédemment (M31 § 2). Le système est formé du solide (S) de masse m et du ressort de raideur k. On écarte le solide de sa position d'équilibre et on le libère. À un instant donné, le centre d'inertie G du solide (S) a une abscisse x, une vitesse $\dot{x}$.

L'**équation horaire** du mouvement s'écrit : $x = x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et la vitesse $\dot{x} = x_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$.



L'**énergie cinétique** du système est $E_c = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$.

En prenant pour état de référence la position d'équilibre (x = 0), l'**énergie potentielle** du système est $E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$.

L'**énergie mécanique** du système est donnée par

$$E_m = E_c + E_p$$

$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 x_m^2 \cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)$. Or $\omega^2 = \frac{k}{m}$ d'où :

$$E_m = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 \left(\cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)\right) \qquad \boxed{E_m = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_m^2}$$

avec v_m : vitesse maximale du solide (lorsqu'il passe à sa position d'équilibre x = 0).

◆ **Remarques :**

- **l'énergie mécanique du système est constante** : elle ne dépend que de l'amplitude.
- le système est **conservatif**
- au cours des oscillations lorsque l'énergie potentielle augmente, l'énergie cinétique diminue et réciproquement.

3.2.2. Cas d'un pendule élastique de torsion

On considère le pendule élastique de torsion vu précédemment (M31 § 3). Le système est formé du fil de constante de torsion C et d'une tige fixée en son centre à l'une des extrémités du fil l'autre extrémité étant fixée à un support. On appelle J le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe passant par son centre. On écarte la tige de sa position d'équilibre et qu'on la libère. À un instant t donné, la tige a une abscisse angulaire θ et une vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

L'**équation horaire** du mouvement s'écrit : $\boxed{\theta = \theta_m \cos(\omega \cdot t + \varphi)}$

et la **vitesse angulaire** $\boxed{\dot{\theta} = -\theta_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)}$.

L'**énergie cinétique** du système est $E_c = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\theta}^2$.

L'**énergie potentielle** du système est (en prenant pour état de référence la position d'équilibre θ= 0) $E_p = \frac{1}{2} C \cdot \theta^2$.

L'**énergie mécanique** du système est donnée par $E_m = E_c + E_p$

$E_m = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega \cdot t + \varphi) + \frac{1}{2} C \cdot \theta_m^2 \cos^2(\omega \cdot t + \varphi)$. Or $\omega^2 = \frac{C}{J}$ d'où :

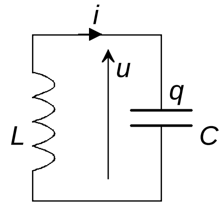
$$E_m = \frac{1}{2} C \cdot \theta_m^2 \left(\cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)\right) \qquad \boxed{E_m = \frac{1}{2} C \cdot \theta_m^2 = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\theta}_m^2}$$

◆ **Remarques :**

- Cette équation est analogue à celle trouvée pour le pendule élastique horizontal (§ 1).
- L'énergie mécanique du système est constante : elle ne dépend que de l'amplitude θ_m.
- Le système est **conservatif**.
- Au cours des oscillations lorsque l'énergie potentielle augmente, l'énergie cinétique diminue et réciproquement.

3.2.3. Analogie avec les circuits électriques

3.2.3.1. Équation différentielle



Un circuit L-C peut être le siège d'**oscillations électriques**. Considérons le circuit formé d'un condensateur parfait de capacité *C* et d'une bobine parfaite d'inductance *L*. À un instant t, on appelle *i* l'intensité dans le circuit et *u* la tension aux bornes du condensateur selon le schéma ci-contre.

Par définition de l'intensité : $i = \dfrac{dq}{dt} = \dot{q}$

La tension aux bornes du condensateur est : $u = \dfrac{q}{C}$

La tension aux bornes de la bobine est : $u = -L\dfrac{di}{dt} = -L\dfrac{d\dot{q}}{dt} = -L\ddot{q}$

Les tensions *u* étant égales, le circuit est décrit par l'**équation différentielle** :

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

soit en posant $\boxed{\omega^2 = \dfrac{1}{LC}}$ $\boxed{\ddot{q} + \omega^2 q = 0}$

3.2.3.2. Variation de l'intensité du courant ; période

En fonction du temps *t* :

- La charge *q* du condensateur varie selon l'équation : $q = q_m \cdot \sin \omega t$, q_m étant la charge maximale.
- L'intensité dans le circuit varie selon l'équation : $i = i_m \cdot \sin(\omega t + \pi/2) = i_m \cdot \cos \omega t$, I étant l'intensité maximale telle que : $i_\mathrm{m} = q_\mathrm{m} \cdot \omega$.

La période des oscillations électrique est : $T = 2\pi\sqrt{LC}$

3.2.3.3. Énergie électrique du circuit

L'**énergie électrique dans le condensateur** est : $E_e = \dfrac{1}{2}C \cdot u^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}\sin^2 \omega t$.

L'**énergie électrique dans la bobine** est : $E_m = \dfrac{1}{2}L \cdot i^2 = \dfrac{1}{2}L \cdot I^2 \cos^2 \omega t$.

L'**énergie électrique totale du circuit** est : $\boxed{E = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2}C \cdot U^2 = \dfrac{1}{2}L \cdot I^2}$

3.2.4. Comparaison des différents oscillateurs

pendule élastique horizontal	pendule élastique de torsion	circuit électrique L-C
x	θ	q
$\dot{x}$	$\dot{\theta}$	i
m	J	L
k	C	$1/C$
$F = -k \times x$	$\Gamma = -C \cdot \theta$	$u = (1/C) \times q$
$E_c = \frac{1}{2}\, m \times \dot{x}^2$	$E_c = \frac{1}{2}\, J \times \dot{\theta}^2 \times$	$E_m = \frac{1}{2}\, L \times i^2$
$E_p = \frac{1}{2}\, k \times x^2$	$E_p = \frac{1}{2}\, C \times \theta^2$	$E_e = \frac{1}{2}\, C \times u^2$
$E_m = \frac{1}{2}\, k \times x_m^2 = \frac{1}{2}\, m \times v_m^2$	$E_m = \frac{1}{2}\, C \times \theta^2_{\max} = \frac{1}{2}\, J \times \dot{\theta}^2_{\max}$	

3.3. Oscillateurs amortis

3.3.1. Non-conservation de l'énergie d'un oscillateur réel

Au cours de ses oscillations, un **oscillateur réel** est soumis à des **frottements** inévitables. Le travail des frottements (négatif) provoque une **diminution de l'énergie mécanique** de l'oscillateur libre pendant son mouvement. On dit alors que l'oscillateur réel libre est **non conservatif**.
Si l'on veut qu'un oscillateur réel conserve une énergie mécanique constante, il faut lui fournir un apport régulier d'énergie par un système extérieur ; on obtient alors un **oscillateur entretenu** (ce n'est plus rigoureusement un oscillateur harmonique) ; le système extérieur peut être, par exemple, les "poids" d'une pendule à balancier, la roue d'échappement à ancre ou un ressort dans une montre mécanique…

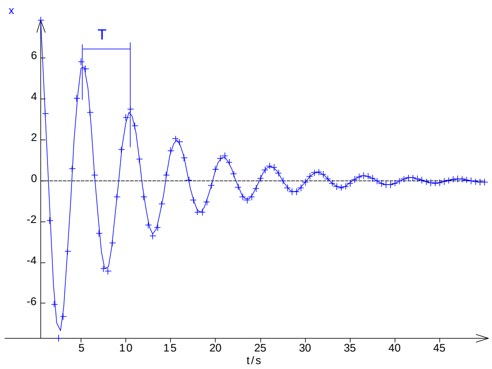
3.3.2. Frottement fluide (ou visqueux)

On dit qu'un frottement est fluide lorsque la force de frottement est proportionnelle à la vitesse : $f = -\lambda \cdot \dot{x}$, le signe moins signifie que le vecteur force est de sens opposé au vecteur vitesse. Ce type de frottement agit lorsqu'un corps se déplace dans un fluide (gaz ou liquide).
L'étude dynamique d'un pendule élastique horizontal soumis à ce frottement aboutit à l'équation :

$$m \cdot \ddot{x} + \lambda \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

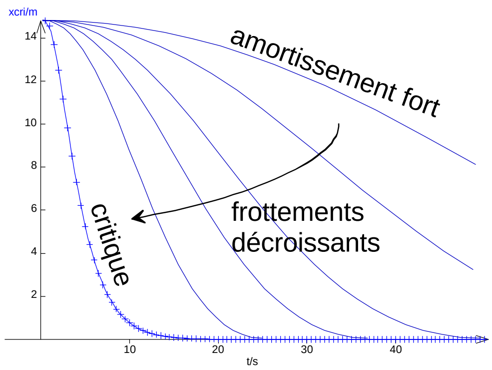
L'étude de cette équation différentielle dépasse le cadre du programme de S.T.L.
Le mouvement de l'oscillateur amorti dépend de l'importance du coefficient de frottement λ

3.3.2.1. Amortissement faible



Si le frottement est faible, le mouvement est **pseudo périodique**.
Le système, ayant été écarté de sa position d'équilibre, oscille, mais l'amplitude des oscillations diminuent progressivement et leur valeur tend vers 0. L'oscillateur se rapproche progressivement de sa position d'équilibre.
Théoriquement l'équilibre n'est jamais atteint.

3.3.2.2. Amortissement fort

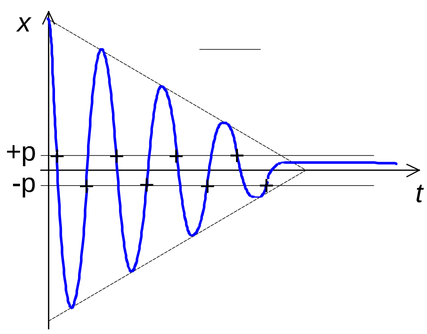


Si le frottement est fort, le mouvement est **apériodique**. Le système, ayant été écarté de sa position d'équilibre, revient lentement vers cette position d'équilibre, mais sans osciller. Ce mouvement est d'autant plus lent que le frottement est important.

3.3.2.3. Amortissement critique

En partant d'un frottement fort, si l'on diminue ce frottement, le mouvement apériodique se fait avec un retour vers la position d'équilibre de plus en plus rapide. Pour une valeur particulière de ce frottement, le régime est dit **critique** : parmi tous les mouvements apériodiques de cet oscillateur, c'est celui pour lequel le retour vers la position d'équilibre est le plus rapide. Si, à partir de cette valeur particulière, on diminuait encore le frottement, le mouvement de l'oscillateur deviendrait pseudo-périodique
Ce **régime critique** présente un intérêt important pour les systèmes mécaniques soumis à des vibrations. On désire très souvent que ces systèmes reviennent rapidement à leur position d'équilibre, mais sans osciller. La suspension de ces systèmes est donc couplée à des **amortisseurs** réglés sur le régime critique (cas des voitures automobile…)

3.3.3. Frottement solide (ou sec)



On dit qu'un frottement est solide lorsque la valeur de la force de frottement est constante (donc indépendante de la vitesse) : $f = \mathrm{constante}$. Le sens du vecteur force est cependant opposé au vecteur vitesse : l'expression de ce frottement peut donc se mettre sous la forme : $f = -\mathrm{sgn}(\dot{x}) \cdot \mathrm{cste}$.

Ce type de frottement se produit au contact de deux solides qui glissent l'un sur l'autre.

Le mouvement est une suite d'oscillations sinusoïdales de pulsation ω_0 centrées alternativement sur les abscisses $p = \frac{cste}{\omega_0^2}$ et $-p$.

On obtient l'arrêt définitif du mouvement lorsque $\dot{x}$ s'annule dans la plage [-p,+p].