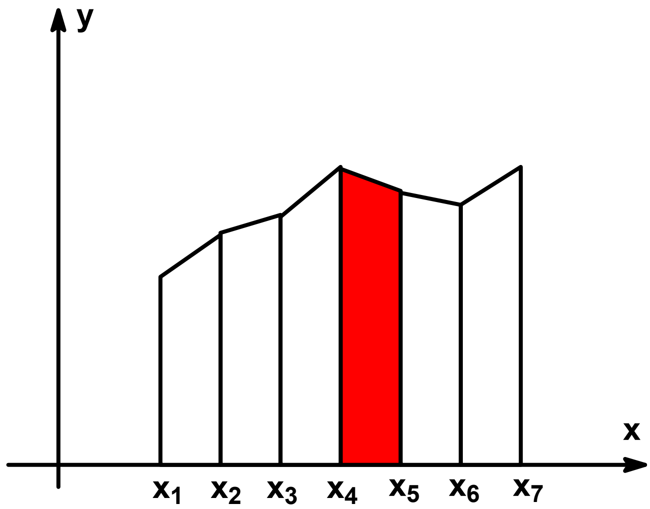
INTEGRATION NUMERIQUE

I - Intégration numérique - Intégration analytique - Comparaison

A partir d'un tableau de valeurs de la fonction Y(x), x variant de x_1 à x_N, on veut calculer l'intégrale de cette fonction sur cet intervalle :

- La méthode la plus simple est la méthode des trapèzes :



$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx dx\frac{f_1 + f_2}{2}$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \approx dx\frac{f_2 + f_3}{2}$$

…………………………..

$$\int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} f(x)dx \approx dx\frac{f_{N-1} + f_{N-2}}{2}$$

$$\int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx \approx dx\frac{f_N + f_{N-1}}{2}$$

On en tire :

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx \approx dx\left[\frac{f_1}{2} + f_2 + \ldots\ldots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right]}$$

- La méthode de SIMPSON est plus précise :

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{dx}{3}\left[f_1 + 4\times f_2 + \underbrace{2\times f_3 + 4\times f_4}_{} + \ldots\ldots + \underbrace{2\times f_{N-2} + 4\times f_{N-1}}_{} + f_N\right]}$$

Elle consiste à assimiler l'aire sous la courbe à la somme des aires sous une succession de paraboles passant respectivement par trois points consécutifs.

Considérons trois points consécutifs. Il existe une parabole passant par ces trois points. Soit $y = a_2x^2+a_1x+a_0$ l'équation de cette parabole.

$$A = \int_{x_1}^{x3} ydx = \int_{x_{2-h}}^{x_{2+h}} ydx = \frac{a_2}{3}\left[x^3\right]_{x_{2-h}}^{x_{2+h}} + \frac{a_1}{2}\left[x^2\right]_{x_{2-h}}^{x_{2+h}} + a_0\left[x\right]_{x_{2-h}}^{x_{2+h}}$$

$$A = 2ha_2x_2^2 + \frac{2}{3}a_2h^3 + 2a_1x_2h + 2a_0h = 2h(a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0) + \frac{2}{3}a_2h^3 = 2y_2h + \frac{2}{3}a_2h^3$$

Or

$$y_1 + y_3 = 2a_2x_2^2 + 2a_1x_2 + 2a_0 + 2a_2h^2 = 2y_2 + 2a_2h^2$$

On en tire :

$$2a_2h^2 = y_1 + y_3 - 2y_2$$

En reportant dans l'expression de A, il vient :

$$A = \frac{1}{3}h\left[y_1 + 4y_2 + y_3\right]$$

$$\int_{x_1}^{xN} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_1 + 4\times f_2 + f_3\right] + \frac{h}{3}\left[f_3 + 4\times f_4 + f_5\right] + ... + \frac{h}{3}\left[f_{N-2} + 4\times f_{N-1} + f_N\right]$$

soit :

$$\int_{x_1}^{xN} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_1 + 4\times f_2 + 2\times f_3 + 4\times f_4 + ... + 2\times f_{N-2} + 4\times f_{N-1} + f_N\right]$$

avec N=2n+1.

Exercice IntNum1 : Aire sous une parabole :

$Y(x)=a.x^2$; $Z_{an}=a.(x_n^3-x_1^3)/3$.

dx	0,05
xmin	2
a	1

x	$Y(x)=a.x^2$	Z_{num}	Z_{an}
2,00	4,000	0,000	0,000
2,05	4,203	0,205	0,205
2,10	4,410	0,420	0,420
2,15	4,623	0,646	0,646
2,20	4,840	0,883	0,883
2,25	5,063	1,130	1,130
2,30	5,290	1,389	1,389
2,35	5,523	1,659	1,659
2,40	5,760	1,942	1,941
2,45	6,003	2,236	2,235
2,50	6,250	2,542	2,542
2,55	6,503	2,861	2,861
2,60	6,760	3,192	3,192
2,65	7,023	3,537	3,537
2,70	7,290	3,895	3,894
2,75	7,563	4,266	4,266
2,80	7,840	4,651	4,651
2,85	8,123	5,050	5,050
2,90	8,410	5,463	5,463
2,95	8,703	5,891	5,891
3,00	9,000	6,334	6,333
3,05	9,303	6,791	6,791

Formules avec EXCEL :

	A	B	C	D
6	x	Y(x)=a.x^2	Znum	Zan
7	=xmin	=a*A7^2	0	0
8	=A7+dx	=a*A8^2	=C7+(B7+B8)/2*dx	= 1/3*(A8^3-A7^3)*a *OU* = 1/3*(A8^3-xmin^3)*a
9	=A8+dx	=a*A9^2	=C8+(B8+B9)/2*dx	= 1/3*(A9^3-A7^3)*a *OU* = 1/3*(A9^3-xmin^3)*a

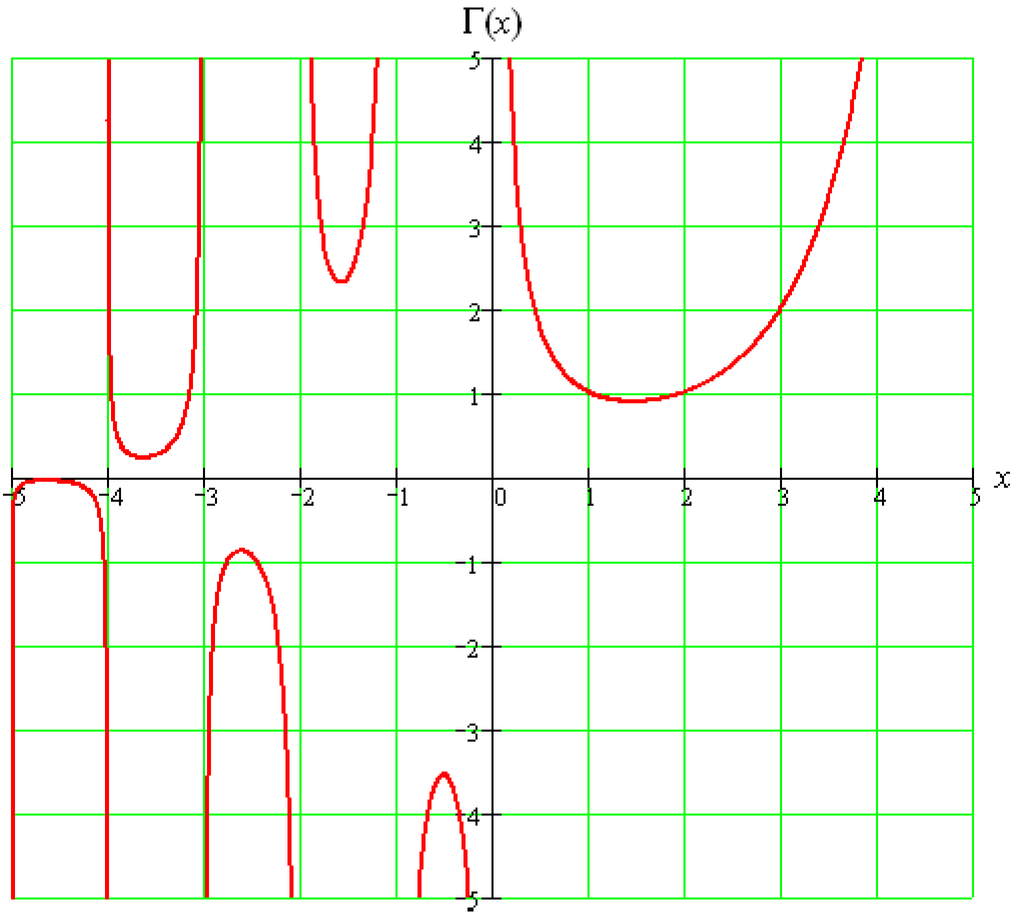
Exercice IntNum2 : Fonction gamma

On trouve la fonction gamma dans les fonctions de densité des lois du χ^2 et de Student.

Fonction gamma : $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$

Utiliser la méthode de SIMPSON pour calculer la valeur de $\Gamma(z)$ avec z = 2 ; 3,5 et 5,5.

On utilisera des valeur de t comprises entre 0 et 24 avec dt = 0,1.



document disponible à l'adresse :

http://www.efunda.com/math/gamma/findgamma.cfm

Exercice IntNum3 : Valeurs moyennes et efficaces

1. Définitions

Soit u(t) périodique de période T, les valeurs moyenne et efficace sont définies de la façon suivante :

$$< u > = \frac{1}{T}\int_0^T u(t).dt \qquad \text{et} \qquad U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t).dt}$$

2. Calcul des valeurs moyenne et efficace théoriques

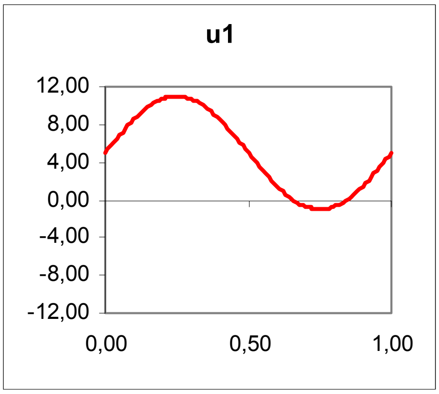
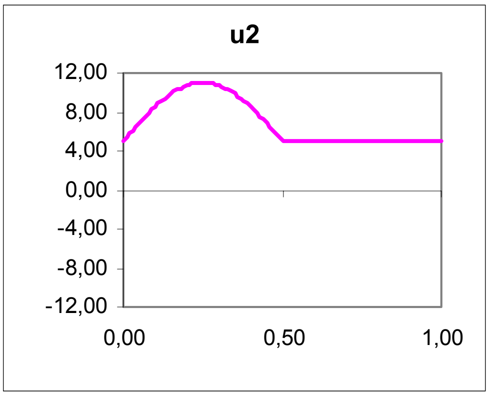
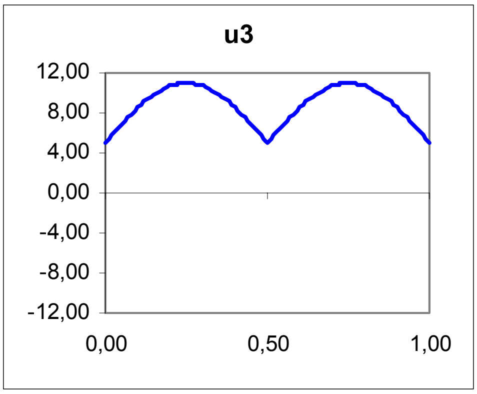
$u_1(t)$: sinusoïde symétrique	$U_{max}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$
$u_2(t)$: sinusoïde symétrique redressée (pont de diodes idéales)	$\lvert u_1(t) \rvert$
$u_3(t)$: sinusoïde avec composante continue	$U_{max}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)+U_0$

⇨ Calculer les valeurs moyenne et efficace des $u_i(t)$.

	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$u_3(t)$
$< u > =$			
$U =$			

- Pour mesurer la valeur efficace d'un signal de valeur moyenne nulle, il faut un appareil portant la mention R.M.S. (Root Mean Square : racine moyenne du carré).

- Pour mesurer la valeur efficace d'un signal de valeur moyenne non nulle, il faut un appareil portant la mention T.R.M.S. (True Root Mean Square).

 	U_1=Asin2πt+U_0 A = 6 V U_0= 5V $<u_1>$ = 5 V U_1eff = 6,56 V
 	Si 0<t<0,50 u_2=|Asin2πt|+U_0 Si 0,50<t<1,00 u_2 = U_0 A = 6 V U_0= 5V $<u_2>$ = 6,90 V U_2eff = 7,29 V
 	u_3=|Asin2πt|+U_0 A = 6 V U_0= 5V $<u_3>$ = 8,82 V U_3eff = 9,01 V