EPREUVE A2

Composition d'électronique,

d'électrotechnique et d'automatique

durée 5 heures

AVERTISSEMENT AUX CANDIDATS

L'épreuve se compose de trois parties, ces parties sont pratiquement indépendantes les unes des autres, mais certains résultats de la première partie pourront être utilisés dans les deux autres.

La première partie traite de l'origine physique du bruit de fond et des modèles utilisés. La deuxième et la troisième partie présentent deux méthodes employées pour augmenter le rapport signal/bruit.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en précisant les initiatives qu'il prend pour la rédaction de sa solution.

RAPPELS DE MATHÉMATIQUES ET DÉFINITIONS

A. Variable aléatoire.

Soit ξ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Elle est définie par sa fonction de répartition $F_\xi(x)$: c'est la probabilité pour que la valeur prise par ξ soit inférieure au nombre réel x : $F_\xi(x) = P(\xi < x)$.

La densité de probabilité $p_\xi(x)$ est la dérivée par rapport à x de la fonction de répartition.

La densité de probabilité est une fonction positive ou nulle, elle vérifie les relations générales :

$$P(\xi \in [x, x + dx[) = p_\xi(x)\,dx.$$

$$P(\xi < x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)\,du.$$

La densité de probabilité vérifie : $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u)\,du = 1.$

Le moment d'ordre n de la variable aléatoire ξ sera noté : $\overline{\xi^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n \cdot p_\xi(u)\,du.$

Le moment d'ordre 1, $E(\xi)$, est appelé espérance mathématique de la variable aléatoire.

La variance de ξ, notée σ_ξ^2, est définie par :

$$\sigma_\xi^2 = \overline{(\xi - \overline{\xi})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \overline{\xi})^2\, p_\xi(u)\,du.$$

D'autre part, on admettra sans démonstration et pour tout le problème, la validité du théorème suivant connu sous le nom de théorème de la limite centrale : Soient N variables aléatoires continues et indépendantes ξ_k, de mêmes densités de probabilité, d'espérances mathématiques respectives $\overline{\xi_k} = \eta_k = \eta_0$ et de variances respectives $\sigma_k^2 = \sigma_0^2$.

Lorsque N est assez élevé, la variable aléatoire $z = \sum_{k=1}^{N} \xi_k$ est une variable aléatoire de densité de probabilité gaussienne, d'espérance mathématique $E(z) = \eta_z = \sum_{k=1}^{N} \eta_k$ et de variance $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2$.

On a donc : $f_z(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \left(\dfrac{(u - \eta_z)^2}{2\sigma^2}\right).$

B. Signal aléatoire.

Un signal aléatoire (ou processus stochastique) $\chi(t)$ est un ensemble de fonctions du temps $\chi_k(t)$, où k est un nombre entier quelconque. Chacune de ces fonctions a une certaine probabilité de se réaliser à l'issue d'une expérience, et s'appelle de ce fait une réalisation du processus. Chaque réalisation possible est un signal déterministe.

Si on considère le processus à un instant donné t_1, l'échantillon $\chi(t_1)$ est une variable aléatoire ayant pour valeurs possibles l'ensemble des valeurs prises à l'instant t_1 par toutes les réalisations possibles du processus. Si le processus est stationnaire d'ordre 2, l'espérance mathématique et la variance de χ sont indépendantes du temps. On peut alors écrire :

$$\overline{\chi(t_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot p_\chi(u, t_1)\,du = E(\chi)\,;$$

$$\sigma_\chi^2(t_1) = \overline{\chi^2(t_1)} - \overline{\chi(t_1)}^2 = \sigma_\chi^2\,.$$

La fonction d'autocorrélation de χ s'écrit, si le processus est stationnaire d'ordre 2 :

$$R_{xx}(\tau) = \overline{\chi(t) \cdot \chi(t+\tau)}.$$

On considérera de plus dans la suite du problème que l'hypothèse d'ergodicité est vérifiée, c'est-à-dire que la connaissance des propriétés statistiques énoncées ci-dessus pourra être atteinte à partir des observations temporelles sur une ou plusieurs réalisations du processus.

La densité spectrale de puissance $S_\chi(f)$ du signal $\chi(t)$ s'obtient par transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation.

Pour un signal $\chi(t)$ de puissance moyenne P_χ finie, on a ainsi :

$$P_\chi = \overline{\chi^2(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \chi^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\chi(f)\, df.$$

C. **Formulaire.**

Un formulaire est disponible en fin de sujet.

Sauf précision dans l'énoncé, les densités spectrales seront bilatérales.

PREMIÈRE PARTIE

ORIGINE PHYSIQUE DU BRUIT DE FOND, SCHÉMAS ÉQUIVALENTS.

- **Bruit de grenaille (ou de Schottky).**

On considère des événements qui se produisent au hasard à des instants notés t_i sur l'axe des temps (fig. I-1-a). On note $P(N, t)$ la probabilité d'avoir N événements pendant le temps t. On désigne par $[N, t]$ la réalisation de N événements pendant le temps t. On suppose de plus que :

i) Pendant un intervalle de temps dt très petit devant les autres temps caractéristiques du processus, il ne peut y avoir que une ou zéro réalisation de l'événement.

ii) Pour cette durée d'observation dt, la probabilité de réalisation d'un événement est proportionnelle à dt et on peut écrire : $P(1, dt) = \lambda \cdot dt$.

I.1. Quelle est la probabilité d'avoir 0 événement pendant l'intervalle de temps dt ?

I.2. Exprimer sous forme logique $[N, t + dt]$ en fonction de $[N, t]$, $[N - 1, t]$, $[0, dt]$, $[1, dt]$.

I.3. Montrer que $P(N, t + dt) = P(N - 1, t) \cdot \lambda\, dt + P(N, t) \cdot (1 - \lambda\, dt)$.

I.4. Établir l'équation différentielle récurrente : $\dfrac{dP(N, t)}{dt} = - \lambda\, [P(N, t) - P(N - 1, t)]$.

I.5. Déterminer explicitement $P(0, t)$ et $P(1, t)$.

I.6. Montrer par récurrence que $P(N, t) = \dfrac{(\lambda\, t)^N}{N!} \cdot \exp(-\lambda t)$.

I.7. Le passage des porteurs à travers une jonction semi-conductrice de section A peut être modélisé par un ensemble de tels processus au travers d'éléments de surface dA suffisamment petits pour que l'on puisse ne considérer que le passage d'un seul porteur au maximum pendant l'intervalle de temps dt. On a naturellement $\displaystyle\int_{\substack{\text{surface}\\ \text{jonction}}} dA = A$.

Dans la suite de cette partie, on considère une jonction $p^+ n$ de telle sorte qu'on ne prend en compte que le courant de trous dans la détermination du courant total. Les calculs sont relatifs à un élément de surface dA.

On appelle p la variable aléatoire pouvant prendre pour valeurs les nombres possibles de transits de trous à travers l'élément dA de la jonction pendant l'intervalle de temps t.

Montrer que $P(p = k, t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$.

I.8. On rappelle que $\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Montrer que le nombre moyen de trous $\overline{p}_t$ traversant dA pendant le temps t (autrement dit l'espérance mathématique de la variable aléatoire p) est égal à λt.

En déduire le nombre moyen $\overline{p}$ de trous traversant l'élément dA de la jonction par unité de temps.

I.9. Déterminer la charge moyenne $\overline{q}$ traversant dA par unité de temps.

I.10. Le passage d'un trou au temps t_i donne en fait une impulsion de courant de valeur $e\,\delta(t - t_i)$ où $\delta(t - t_i)$ est l'impulsion de Dirac (Fig. I-1-b) et e la charge élémentaire. Expliquer pourquoi la variable aléatoire $z(t) = \sum_i e\, \delta(t - t_i)$ représente le courant traversant la jonction.

I.11. On peut montrer (et on admettra ce résultat dans la suite) qu'une telle variable aléatoire admet pour espérance mathématique $E(z(t)) = e\,\lambda$ et pour fonction d'autocorrélation :

$$R_{zz}(\tau) = e^2\,[\lambda^2 + \lambda \cdot \delta(\tau)].$$

Retrouver la valeur de $E(z(t))$ par un raisonnement physique.

I.12. Calculer la densité spectrale de puissance de $z(t)$ et montrer que le courant dans un élément de jonction peut se mettre sous la forme $I(t) = I_0 + i(t)$. Montrer que I_0 est un courant continu dont on précisera la valeur et que $i(t)$ est un terme de bruit dont on précisera la valeur moyenne et la densité spectrale de puissance.

I.13. Montrer que ce dernier résultat est encore valable dans sa forme si on considère le courant relatif à la surface totale A de la jonction. Les propriétés statistiques de $i(t)$ sont alors modifiées. Comment ?

I.14. En utilisant le modèle de Shokley pour représenter la caractéristique courant-tension $\left(I(V_D) = I_s\left(\exp\dfrac{e \cdot V_D}{kT} - 1\right)\right)$ d'une diode à jonction $p^+ n$, on souhaite déterminer son schéma équivalent de Thévenin « bruité » sous la forme d'une source de tension de bruit $\boldsymbol{v(t)}$ et d'une résistance en série. Déterminer la résistance dynamique r_{df} de la diode correspondant à un point de fonctionnement passant (V_f, I_f) en fonction de I_f et $\dfrac{e}{kT}$ en supposant $I_f \gg I_s$.

I.15. En utilisant les résultats établis précédemment, montrer que le schéma équivalent de Thévenin comprend une source de tension de bruit v de densité spectrale de puissance $S_v = \dfrac{(kT)^2}{e\,I_f}$ et la résistance r_{df}.

I.16. *Application numérique :* Calculer S_v pour $I_f = 100\ \mu A$ et $T = 300$ K.

• **Bruit thermique.**

On considère une résistance de valeur R, de longueur ℓ et de section A, possédant des électrons « libres » de densité électronique volumique uniforme n (Fig. I-3). Pour simplifier, on considère que cette résistance est insérée dans un circuit passif ne comportant pas de générateur. On appelle τ_c le temps moyen entre collisions électroniques ($\tau_c = 1{,}0 \times 10^{-13}$ s) et on ramène l'étude du mouvement des électrons de la résistance à un problème unidimensionnel d'axe Ox.

I.17. On suppose donc que $\overrightarrow{u_e}$, vecteur vitesse d'entraînement des électrons, est dirigé selon $\overrightarrow{Ox}$ et l'on note u_e la mesure algébrique de sa projection sur cet axe. De même, le champ électrique $\overrightarrow{E}$, lorsqu'il existe, est dirigé suivant $\overrightarrow{Ox}$ et l'on note E la mesure algébrique de sa projection ($E > 0$). On peut alors écrire l'équation d'évolution de u_e d'un électron soumis à $\overrightarrow{E}$ sous la forme :

$$m\left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_c}\right] u_e = -\,e\,E.$$

Déterminer la valeur de la vitesse d'entraînement u_e en régime stationnaire.

I.18. Exprimer la densité de courant j en régime stationnaire et montrer que :

$$R = \frac{m}{n\,e^2\,\tau_c} \cdot \frac{\ell}{A}.$$

I.19. On note u_i la vitesse suivant Ox du i-ème électron. La différence de potentiel v est en fait une variable aléatoire dont l'espérance mathématique, RI, est fixée par le circuit extérieur (en l'occurrence, I = 0). Justifier l'expression de v sous la forme :

$$v = \frac{\mathrm{R\,e}}{\ell} \sum_1^{\mathrm{N}} u_i = \sum_1^{\mathrm{N}} v_i$$

où N est le nombre total d'électrons contenus à chaque instant dans la résistance et v_i une « tension élémentaire » correspondant au i-ème électron.

I.20. La densité spectrale de v_i est notée $\mathrm{S}_{v_i}(f)$.

Justifier physiquement le fait que la fonction d'autocorrélation de v_i puisse s'écrire :

$$\mathrm{R}_{v_i v_i}(\tau) = \overline{v_i^2}\ \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_c}\right).$$

I.21. Calculer $\mathrm{S}_{v_i}(f)$. Il existe un domaine de fréquences où l'on peut admettre que l'égalité $\mathrm{S}_{v_i}(f) = 2 \cdot \left(\frac{\mathrm{R} \cdot \mathrm{e}}{\ell}\right)^2 \overline{u_i^2} \cdot \tau_c$ est pratiquement satisfaite. Quel est ce domaine ?

Dans la suite du problème on supposera que l'on se trouve dans ce domaine.

Application numérique : $\tau_c = 1{,}0 \times 10^{-13}$ s . Commenter l'hypothèse précédente.

I.22. En tenant compte du théorème de l'équipartition de l'énergie $\left(\frac{1}{2} m\, \overline{u_i^2} = \frac{1}{2} k\mathrm{T}\right)$, montrer que si la bande passante du circuit (limitée aux fréquences positives) est égale à Δf, on a : $\overline{v^2} = 4\, k\, \mathrm{T}\, \mathrm{R}\, \Delta f$.

Pourquoi peut-on dire que le bruit thermique étudié ci-dessus est « gaussien » ?

I.23. Établir, en les justifiant, les schémas de bruit équivalents de Thévenin et de Norton d'une résistance R.

Application numérique : On prend T = 300 K. Calculer la densité spectrale de la tension de bruit du générateur équivalent de Thévenin pour une résistance de 100 Ω puis pour une résistance de 10 MΩ.

I.24. Calculer la valeur de la résistance induisant la même densité spectrale de puissance de bruit que la diode étudiée à la question I.16. Commenter le résultat dans le cas où le point de fonctionnement de la diode change.

II.8. De la question II.7., déduire la puissance moyenne de bruit en sortie du filtre pour toute valeur de m.

II.9. Montrer alors que la bande passante équivalente de bruit pour le filtre du deuxième ordre de fonction de transfert $\underline{H}(f)$ est : $\Delta f_n = \dfrac{\pi f_0}{4\,m}$.

II.10. En déduire que :

$$r(m) = \frac{\Delta f_n}{f_{-3\,\mathrm{dB}}} = \frac{\pi}{4\,m\sqrt{1 - 2\,m^2 + \sqrt{(1 - 2\,m^2)^2 + 1}}}$$

où $f_{-3\,\mathrm{dB}}$ est la fréquence de coupure du filtre à -3 dB.

II.11. Tracer l'allure de $r(m) = \dfrac{\Delta f_n}{f_{-3\,\mathrm{dB}}}$ en fonction de m en déterminant les valeurs asymptotiques de $r(m)$ ainsi que son minimum. Pour ce dernier point, en se plaçant d'emblée dans le cas où l'inégalité $m < 1$ est vérifiée, on procédera systématiquement aux approximations régies par $(1 - a\,m^2)^\alpha \approx 1 - \alpha\,a\,m^2$ et l'on admettra que le minimum de l'expression équivalente ainsi obtenue est aussi le minimum de $r(m)$.

II.12. Pour une bande passante à -3 dB donnée, déterminer le coefficient d'amortissement optimal pour ce système en terme de rapport signal sur bruit en sortie du filtre. Commenter ce résultat.

II.13. On considère maintenant un signal continu $s = s$ noyé dans du bruit $b(t)$; le signal résultant à traiter est donc de la forme : $x(t) = s + b(t)$. Ce bruit est centré, gaussien et de densité spectrale de puissance S_b uniforme dans la bande $2\,\Delta B$. La première étape pour extraire le signal du bruit consiste à multiplier $x(t)$ par un signal sinusoïdal $m(t) = M \cdot \cos(2\,\pi f_m\,t)$ de manière à obtenir un signal $x_m(t)$. On effectue ensuite une détection synchrone, c'est-à-dire qu'on multiplie le signal $x_m(t)$ par un signal de la forme $m_d(t) = M_d \cos(2\pi f_m\,t + \phi_m)$ puis on intègre le signal obtenu, comme indiqué sur la figure II-3.

En considérant la chaîne de mesure sur la figure II-3, écrire la représentation mathématique des signaux $x_m(t)$ et $y(t)$.

II.14. On traite $y(t)$ par un intégrateur idéal de telle sorte qu'on puisse écrire :

$$z = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t)\,dt.$$

Montrer qu'un tel intégrateur permet de restituer le signal continu s.

Déterminer ϕ_m pour que la détection soit optimale.

II.15. On insère un filtre sélectif de facteur d'amplification nominal $H_{0n} = 1$ et de bande équivalente de bruit Δf_n à l'entrée du détecteur synchrone. Déterminer le rapport signal sur bruit :

i) R_e à l'entrée du filtre sélectif ;

ii) R_e' en sortie du filtre sélectif.

En fait, l'intégrateur n'est pas idéal (T n'est pas infini) : il est caractérisé par une durée d'intégration T_i.

On peut montrer alors, et on admettra ce résultat, que le rapport signal sur bruit en sortie de l'intégrateur est égal à :

$$R_s = \frac{s^2}{S_b} \cdot T_i.$$

Exprimer R_s en fonction de R_e ; discuter ce résultat.

II.16. On suppose désormais que le signal s n'est plus continu mais est lentement variable avec une occupation spectrale bilatérale centrée sur 0 de $2\,\Delta F$ ($\Delta F < \Delta f_n < \Delta B \ll f_m$).

On notera ce signal $s(t)$ dans la suite du problème et $S(f)$ sa densité spectrale d'amplitude.

($S(f)$ est aussi la transformée de Fourier de $s(t)$).

On considère le signal $s(t)$ en l'absence de bruit et on se propose d'étudier l'influence du temps d'intégration sur la reconstitution du signal après la séquence « multiplication-détection ». On suppose de plus que le filtre sélectif ne modifie pas le signal $s(t)$ et on admet que $\frac{M \cdot M_d}{2} \cos \phi_m = 1$.

Le temps d'intégration T_i n'étant pas infini, on admet qu'on peut écrire $z(t)$ en sortie de l'intégrateur sous la forme :

$$z(t) = \frac{1}{T_i} \int_{t-\frac{T_i}{2}}^{t+\frac{T_i}{2}} y(v)\, dv = \frac{1}{T_i} \int_{-\infty}^{+\infty} y(u) \prod_{\frac{T_i}{2}} (t-u)\, du$$

où $\prod_{\frac{T_i}{2}} (t) = 0$ si $|t| > \frac{T_i}{2}$ et $\prod_{\frac{T_i}{2}} (t) = 1$ si $|t| < \frac{T_i}{2}$.

Montrer qu'alors, la transformée de Fourier de z s'écrit :

$$Z(f) = S(f) \frac{\sin \pi f T_i}{\pi f T_i} + \frac{1}{2} [S(f-2f_m) + S(f+2f_m)] \cdot \frac{\sin \pi f T_i}{\pi f T_i}$$

que l'on écrira sous la forme :

$Z(f) = Z_1(f) + Z_2(f)$ avec $Z_1(f) = S(f) \cdot \frac{\sin \pi f T_i}{\pi f T_i}$ et $Z_2(f) = \frac{1}{2} [S(f-2f_m) + S(f+2f_m)] \cdot \frac{\sin \pi f T_i}{\pi f T_i}$.

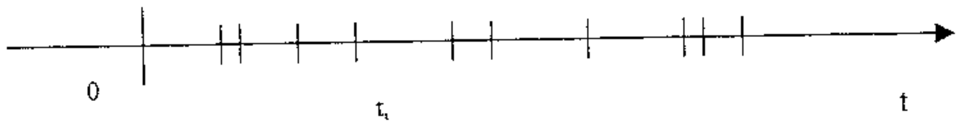
II.17. Montrer que $Z_2(f)$ est négligeable devant $Z_1(f)$ si on intègre sur un nombre suffisant de périodes du signal modulé, c'est-à-dire si $T_i \gg 1/f_m$.

Application numérique : Pour $f_m = 10$ kHz, déterminer le temps d'intégration minimal pour que $\frac{|Z_2(f)|}{|Z_1(f)|} < 10^{-4}$.

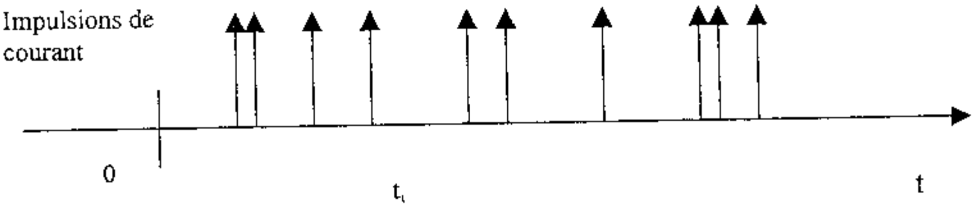
II.18. Établir alors la condition sur le produit $\Delta F \cdot T_i$ pour que le spectre d'amplitude du signal $z(t)$ ne soit pas différent de plus de 1 % de celui de $s(t)$.

II.19. En utilisant les résultats établis au II.13., évaluer le gain maximal possible en rapport signal sur bruit ($\Gamma = \frac{R_s}{R_e}$) compatible avec le résultat établi à la question II.18.

Application numérique : $f_m = 10$ kHz, $\Delta F = 0{,}01$ Hz, $f_m = 10$ kHz, $\Delta F = 10$ Hz. Commentez ce résultat.



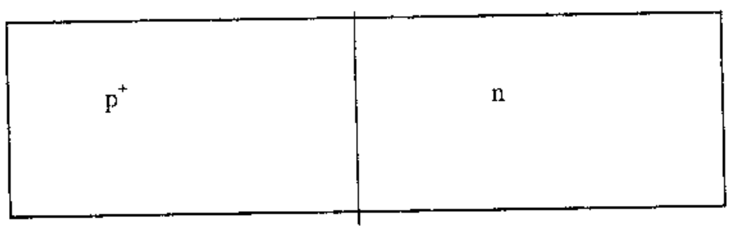
(a)



(b)

Fig.I-1

Surface totale de la jonction = A



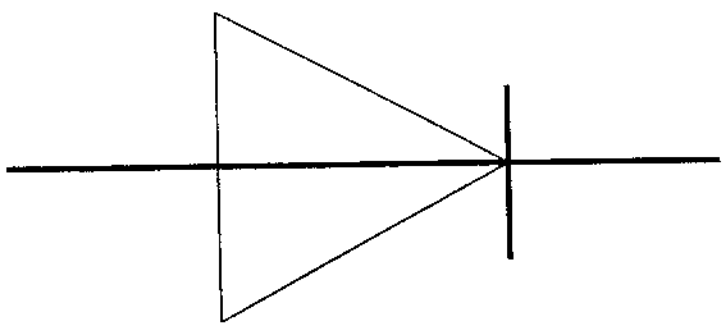


Fig.I-2

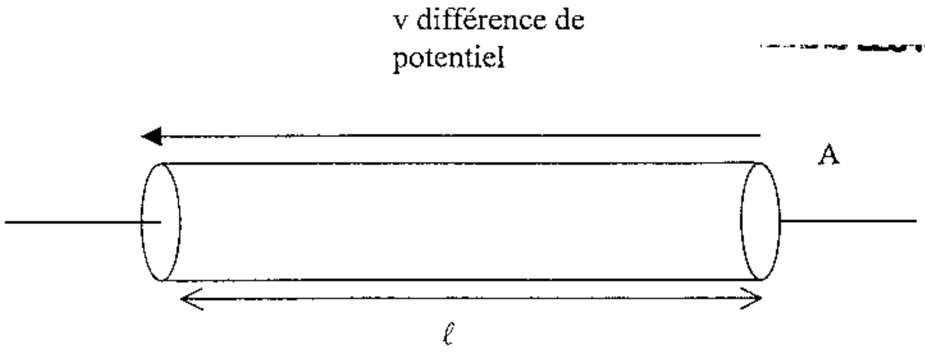


Fig.I-3

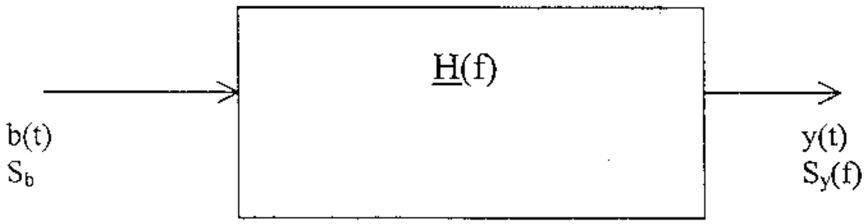


Fig.II-1

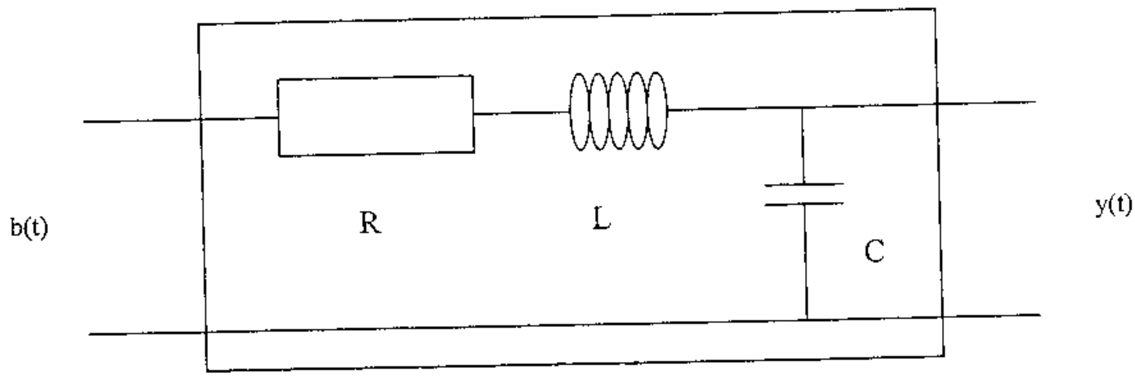


Fig.II-2

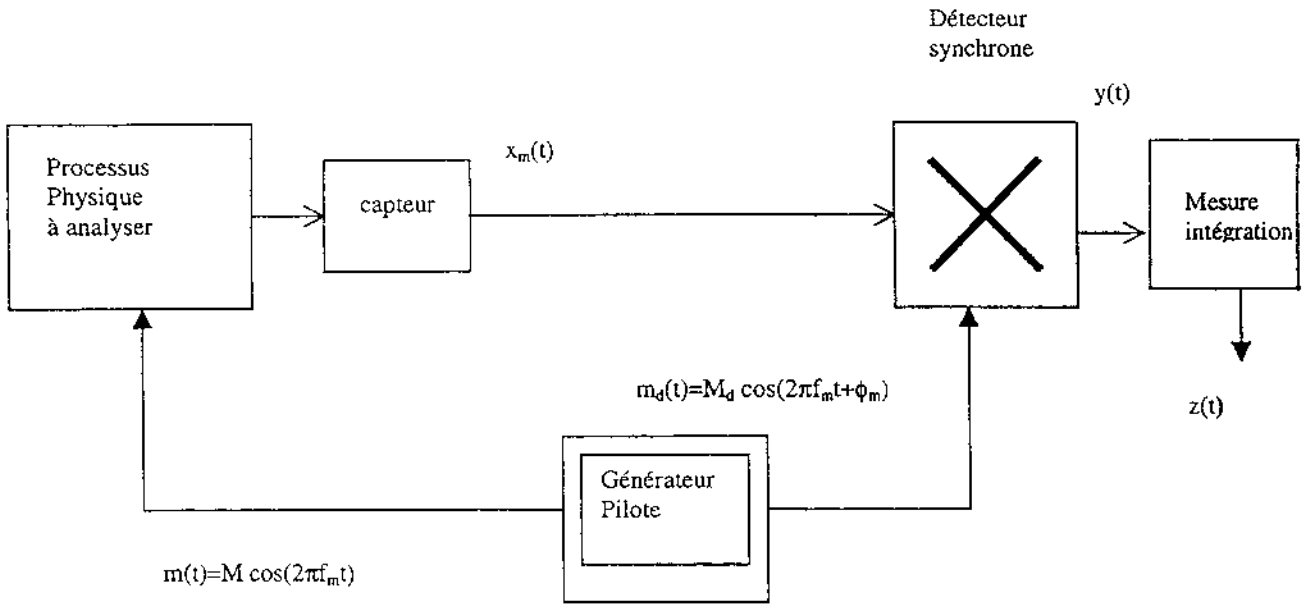


Fig.II-3

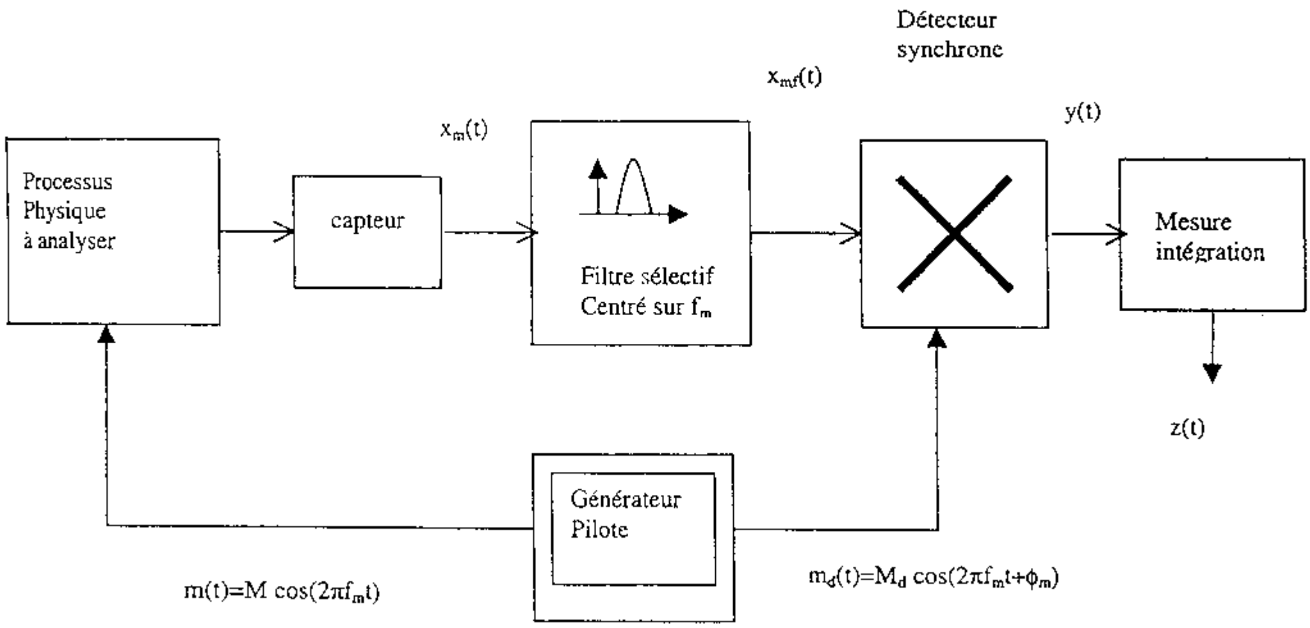


Fig.II-4

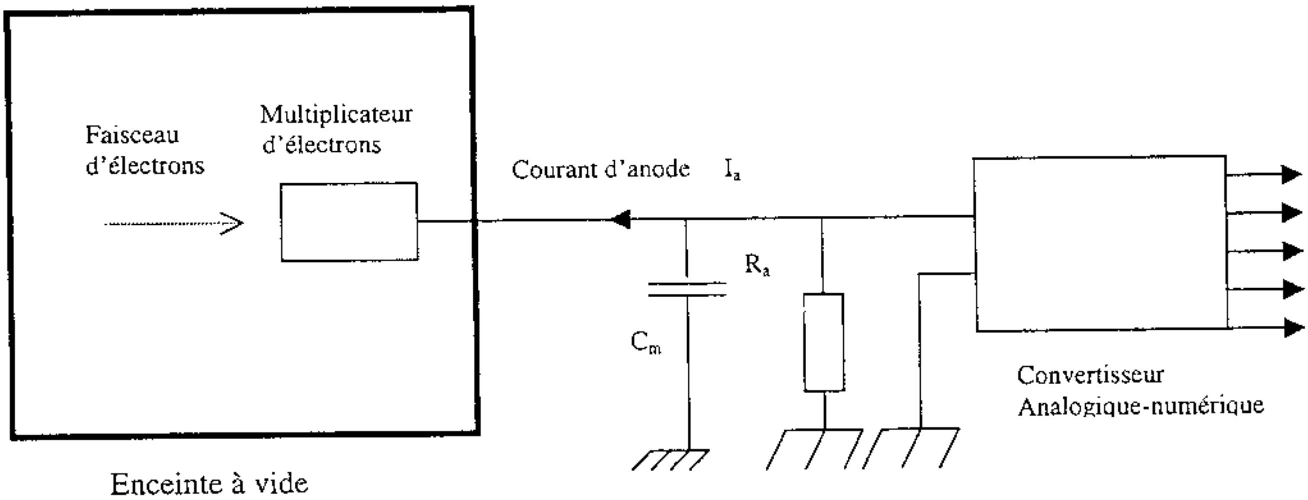

Faisceau d'électrons
Multiplicateur d'électrons
Courant d'anode I_a
R_a
C_m
Convertisseur Analogique-numérique
Enceinte à vide

Fig.III-1

Formulaire

Constantes physiques

Constante de Boltzmann : $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}
Constante de Planck : $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s
Charge de l'électron : $-e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C

Transformées de Fourier

$$f(t) \xleftrightarrow[\text{Fourier}]{} F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-2j\pi ft)dt$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)] \xleftrightarrow[\text{Fourier}]{} 2j\pi f\, F(f)$$

Produit de convolution de f(t) par g(t) : $[f * g](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cdot g(t-u)\,du$

Fonction porte centrée sur 0 d'amplitude 1 et de largeūr T : $\Pi_{\frac{T}{2}}(t) \xleftrightarrow[\text{Fourier}]{} T \cdot \frac{\sin \pi fT}{\pi fT}$

Pour $a > 0$, $\exp(-a\,|\,t\,|) \xleftrightarrow[\text{Fourier}]{} \frac{2\,a}{a^2 + (2\pi f)^2}$

Pour $m < 1$: $f(t) = \frac{U(t).\,\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \exp(-m\omega_0 t)\cdot \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-m^2}\cdot t\right) \xleftrightarrow[\text{Fourier}]{} F(f)$

Pour $m = 1$: $f(t) = U(t).\,\omega_0{}^2 .\, t \exp(-\omega_0 t) \xleftrightarrow[\text{Fourier}]{} F(f)$

Pour $m > 1$: $f(t) = \frac{U(t).\,\omega_0}{\sqrt{m^2-1}} \exp(-m\omega_0 t)\cdot \mathrm{sh}\left(\omega_0 \sqrt{m^2-1}\cdot t\right) \xleftrightarrow[\text{Fourier}]{} F(f)$

avec U(t) fonction échelon et $F(f) = \frac{1}{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + 2j\,m\left(\frac{f}{f_0}\right)}$.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc}\tan x + C^{te}$$