EPREUVE A1

composition de physique

Durée 5 heures

Avertissement aux candidats

Ce problème propose une étude simplifiée de certains phénomènes physiques dont la modélisation est indispensable au lancement et à l'utilisation de tout satellite terrestre artificiel et de tout vaisseau spatial (fusée, navette,...).

L'épreuve comporte trois parties : dans la première (A), on étudie le champ gravitationnel de la Terre ou d'une autre planète ; dans la deuxième (B), on passe en revue différents milieux de l'atmosphère terrestre traversés par un satellite ou par les ondes électromagnétiques qui permettent de communiquer avec celui-ci. La troisième partie (C) est une étude simplifiée et partielle du mouvement d'un satellite par rapport à la Terre.

Notations et valeurs de quelques constantes utilisées dans le problème. On notera :

G la constante de gravitation universelle ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$) ;

ε_0 la permittivité du vide ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$) et μ_0 sa perméabilité ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$) ;

c la vitesse de la lumière ($c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$) ;

$-e$ la charge de l'électron ($e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C) et m_e sa masse ($m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) ;

N le nombre d'Avogadro ($N = 6{,}02 \times 10^{23}$) ;

R la constante des gaz parfaits ($R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1}}$).

Rappel : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{Arc\,cos} x + \mathrm{Cte}.$

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en précisant les initiatives qu'il prend pour la rédaction de sa solution.

PARTIE A

A.1. Champ de gravitation newtonien.

A.1.1. Rappeler l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{12}}$ qu'exerce une masse ponctuelle m_1 située en A_1 sur une masse ponctuelle m_2 dont la position A_2 est repérée par rapport à celle de A_1 par le vecteur $\vec{\rho} = \overrightarrow{A_1A_2}$. Quelle est la force $\overrightarrow{F_{21}}$ que m_2 exerce sur m_1 ?

A.1.2. Proposer, en la commentant, une expression pour l'énergie potentielle d'interaction V_{12} correspondant à $\overrightarrow{F_{12}}$.

A.1.3. On considère maintenant une répartition continue stationnaire de masse d'extension spatiale finie. Dans un certain repère d'espace, d'origine O, cette répartition est caractérisée en chaque point M par une masse volumique $\mu(\vec{r})$ où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. On notera P le domaine de l'espace à l'extérieur duquel $\mu(\vec{r})$ s'annule identiquement.

Exprimer le champ gravitationnel $\vec{\Gamma}(\vec{R})$ créé par cette répartition en un point A de l'espace tel que $\vec{R} = \overrightarrow{OA}$.

A.1.4. Montrer que ce champ dérive d'un potentiel $U(\vec{R})$ dont on donnera l'expression.

A.1.5. Le champ $\vec{\Gamma}(\vec{R})$ satisfait au théorème de Gauss. Exprimer ce théorème, sans le démontrer, sous la forme globale la plus générale possible.

Donner également l'équation locale, reliant $\vec{\Gamma}(\vec{R})$ et $\mu(\vec{R})$, qui équivaut au théorème de Gauss.

A.1.6. Déduire des questions A.1.4. et A.1.5. l'équation générale (dite équation de Poisson) vérifiée par le potentiel $U(\vec{R})$. Que devient cette équation en un point A extérieur au domaine P ?

A.2. Planète sphérique.

En première approximation, on peut considérer la Terre et les autres planètes du système solaire comme sphériques.

On s'intéresse donc ici à une répartition continue de masse à symétrie sphérique, centrée sur un point O choisi comme origine du repère. Cette répartition, de masse totale M_P, est caractérisée par la masse volumique suivante :

$\mu(\vec{r}) = \mu(r)$ si $r < R_P$; $\mu(\vec{r}) = 0$ si $r > R_P$, avec $r = \|\vec{r}\|$ et R_P rayon de la planète sphérique P.

A.2.1. Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ gravitationnel $\vec{\Gamma}(\vec{R})$ en tout point A de l'espace.

A.2.2. Déterminer explicitement $\vec{\Gamma}(\vec{R})$ à l'extérieur de la sphère P. Donner l'expression du potentiel $U(\vec{R})$ correspondant.

A.2.3. On suppose pour simplifier que $\mu(r)$ est la fonction affine :

$$\mu(r) = \mu_0\left(1 - \frac{r}{R_P}\right).$$

Relier μ_0 à M_P et R_P et évaluer le champ gravitationnel $\vec{\Gamma}(\vec{R})$ à l'intérieur de la planète. Donner l'expression du potentiel $U(\vec{R})$ pour $R = \|\vec{R}\| < R_P$.

A.2.4. On pose $\Gamma = \|\vec{\Gamma}\|$. Représenter l'allure de $U(R)$ et celle de $\Gamma(R)$ pour les questions A.2.2. et A.2.3.

A.3. **Champ gravitationnel d'une planète non sphérique à grande distance.**

On souhaite tenir compte de la nature non sphérique de la planète P considérée. Dans ce qui suit, O étant, comme précédemment, l'origine du repère considéré, un point M de la planète tel que $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y et z et la répartition $\mu(\vec{r})$ considérée est supposée d'extension spatiale finie, sa longueur caractéristique étant égale à R_P. Les moments d'inertie de P par rapport aux axes Ox, Oy et Oz sont notés respectivement I_{Ox}, I_{Oy} et I_{Oz}.
On décide d'étudier le champ gravitationnel de la planète en déterminant directement un potentiel gravitationnel scalaire U dont il dérive pour des points suffisamment éloignés de celle-ci.

A.3.1. Soit un point A repéré par le rayon vecteur $\vec{R} = \overrightarrow{OA}$ avec $R = \|\vec{R}\| \gg R_P$ (fig. 1).

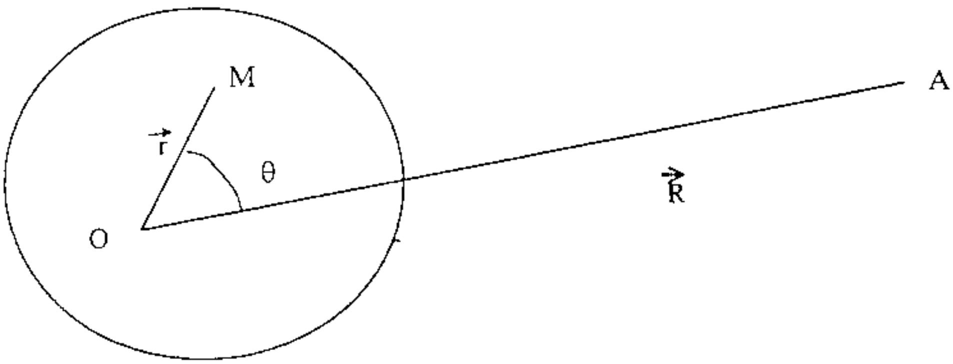

Figure 1

Donner, en fonction de R, r et du produit scalaire $\vec{R}\cdot\vec{r}$, une expression de la quantité $\dfrac{1}{MA}$, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 par rapport à l'infiniment petit $\dfrac{r}{R}$.

A.3.2. Dans ces conditions, on peut écrire :

$$U(\vec{R}) \approx -\frac{G}{R}\left(K_1 + \frac{K_2}{R} + \frac{K_3}{2\,R^2}\right)$$

où K_1, K_2 et K_3 sont trois intégrales de volume étendues à l'ensemble de la planète P.

A.3.2.1. Donner l'expression de K_1 en utilisant la masse volumique $\mu(\vec{r})$ et l'élément de volume $d\tau$.

A.3.2.2. Montrer de même que K_2 peut s'écrire sous la forme du produit scalaire $\vec{p}\cdot\vec{e_R}$ où $\vec{p}$ est un vecteur que l'on définira et $\vec{e_R} = \dfrac{\vec{R}}{R}$. Proposer un nom pour $\vec{p}$.

Quelle est la valeur de K_2 dans le cas où l'origine O des coordonnées coïncide avec le centre de masse C de la planète P ?

A.3.2.3. Donner l'expression de K_3 sous la forme d'une intégrale étendue à P faisant intervenir le produit scalaire $\vec{e_R}\cdot\vec{r}$ et $r = \|\vec{r}\|$.

A.3.3. Exprimer K_2 et K_3 en fonction de r et de l'angle θ entre les vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{r}$ et de l'élément différentiel $\mu\, d\tau$.

A.3.4. Montrer que K_3 s'exprime aisément à l'aide des moments d'inertie I_{Ox}, I_{Oy} et I_{Oz} et de l'intégrale :

$$K = \int_{\rho} (r^2 \sin^2 \theta)\, \mu\, d\tau.$$

Donner sans calcul la valeur de K en fonction de M_p et R_p lorsque la planète est sphérique.

Que dire de la contribution du terme contenant K_3 pour une planète « presque sphérique » ?

A.3.5. Si le terme contenant K_1 peut être qualifié de terme monopolaire, quel nom donneriez-vous, respectivement, à ceux qui contiennent K_2 et K_3 ?

A.3.6. $U(\overrightarrow{R})$ dépend des coordonnées du point A et, en particulier, des angles Φ et λ qui permettent de le repérer (fig. 2). Lorsque O coïncide avec le centre de masse C de ρ, quel est le terme de $U(\overrightarrow{R})$ qui est susceptible de varier avec Φ et λ ?

A.4. En général, pour un satellite, la condition $R \gg r$ n'est pas vraiment réalisée et la symétrie de révolution n'est pas parfaite. Bien qu'utilisées, les expressions précédentes sont souvent remplacées par un potentiel $U(\overrightarrow{R})$ vérifiant l'équation de Poisson sous la forme d'une série de termes.

L'origine des coordonnées étant choisie au centre d'inertie de la Terre (fig. 2), on trouve que l'on peut écrire, pour tout point M caractérisé par R, Φ et λ :

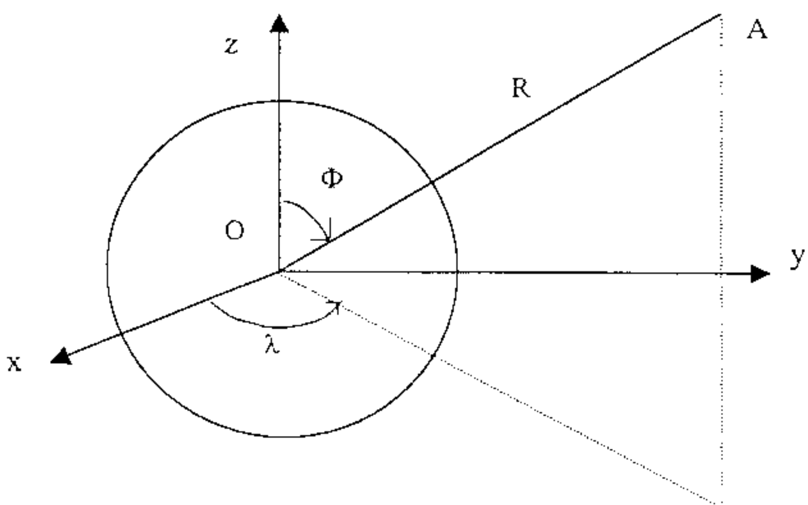

Figure 2

$$U(\overrightarrow{R}) = -\frac{G\,M_P}{R}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \frac{P_n(\cos\Phi)}{R^n} + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} J_{n,m} \frac{P_{n,m}(\cos\Phi)}{R^n} \cos\left[m(\lambda - \lambda_{n,m})\right]\right\}.$$

Dans cette expression, les différents coefficients J_n, $J_{n,m}$ et $\lambda_{n,m}$ de la série sont connus ; les notations P_n et $P_{n,m}$ représentent deux familles de polynômes ; par exemple $P_2 = \dfrac{3\cos^2\Phi - 1}{2}$.

Pourquoi cette approche est-elle la mieux adaptée pour tenir compte de l'influence de la non-sphéricité de la Terre sur le mouvement de ses satellites ?

PARTIE B

ATMOSPHÈRE TERRESTRE

L'atmosphère terrestre est un mélange gazeux composé principalement de diazote et de dioxygène ; ce mélange contient aussi d'autres gaz.

Le modèle d'atmosphère le plus simple suppose que chaque espèce gazeuse peut être considérée comme un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique à une température T indépendante de l'altitude h. Ce gaz parfait, en rotation à la même vitesse angulaire que la Terre, n'est soumis, en première approximation, qu'à l'attraction terrestre (on néglige donc les forces d'inerties dues au caractère non galiléen du référentiel terrestre) ; on rend compte de l'attraction gravitationnelle en introduisant le vecteur $\vec{\Gamma}$, accélération de la pesanteur dans le référentiel terrestre, dirigé en première approximation vers le centre de la Terre et en le supposant de norme constante égale à g_0.

B.1. Dans le cadre de ce modèle, on suppose que la pression totale p_t en un point donné A de l'atmosphère est la somme des pressions partielles de ses différentes composantes gazeuses en ce point, calculées comme si chaque composante gazeuse était seule.

B.1.1. Quelle propriété concernant les différentes composantes gazeuses est nécessaire pour que cette hypothèse soit adoptée ?

B.1.2. On s'intéresse à l'une quelconque des composantes gazeuses de l'atmosphère, de masse molaire $M = \mathcal{N}\,m$, $\mathcal{N}$ étant le nombre d'Avogadro.

Soit n (h) la concentration moléculaire volumique de cette composante à l'altitude h. On note p (h) la pression partielle correspondante.

Écrire l'équation d'état des gaz parfaits reliant n (h) à p (h). On utilisera pour cela la constante de Boltzman $k_B = \dfrac{R}{\mathcal{N}}$.

B.1.3. Déduire de cette équation et de l'équation locale de la statique des fluides l'équation différentielle vérifiée par n (h).

B.1.4. Intégrer ce résultat et en déduire l'expression de n (h) en fonction de $n_0 = n(h_0)$, de la masse moléculaire m, et de h_0, g_0, k_B et T.

B.1.5. Cette expression de n (h) fait intervenir une longueur caractéristique L qui dépend de la nature du gaz parfait considéré. Donner l'expression de cette longueur caractéristique et calculer sa valeur pour le diazote ($M_{N_2} = 28$ g) et le dihydrogène ($M_{H_2} = 2{,}0$ g) lorsque la température T est égale à $1{,}2 \times 10^3$ K, en prenant $g = 8{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (conditions correspondant à une altitude de 500 km).

B.1.6. Déduire de ce qui précède une propriété qualitative de la variation de la composition d'une atmosphère obéissant à ce modèle (en particulier isotherme) avec l'altitude.

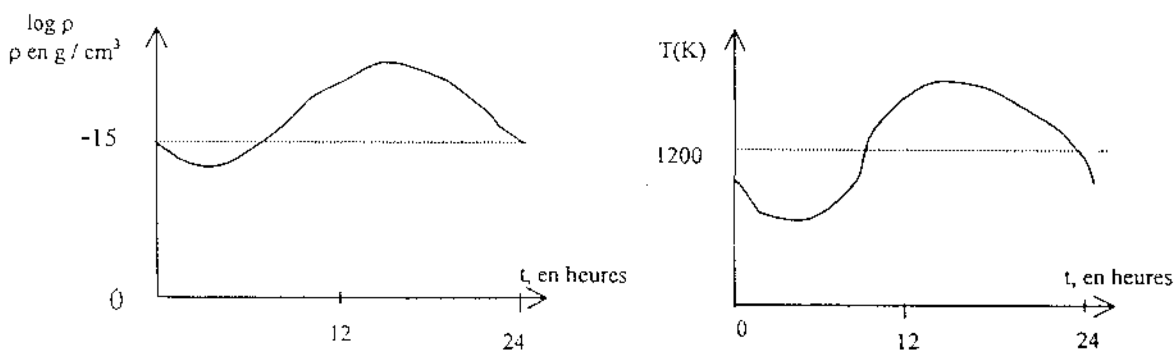

Figure 3

B.1.7. On s'intéresse à l'un des gaz du mélange atmosphérique. La figure 3 représente l'allure des relevés expérimentaux de la variation de sa masse volumique ρ en fonction du temps, pendant une journée, à une altitude donnée (500 km) et de la variation de la température T à cette même altitude et pendant la même journée.

Peut-on rendre compte de ces observations, au moins qualitativement, en utilisant le modèle étudié jusqu'à présent. Comment ?

B.1.8. On peut corriger le modèle précédent en prenant en compte la variation de l'attraction terrestre en fonction de l'altitude h mesurée par rapport à la surface de la Terre.

En utilisant pour cela les hypothèses de la question A.2., et, plus particulièrement, le résultat de la question A.2.2., exprimer la valeur Γ du champ gravitationnel terrestre en un point d'altitude h, en fonction de h, de la valeur g_0 de ce même champ à l'altitude h_0, du rayon R_T de la Terre et de h_0.

B.1.9. On pose $n(h_0) = n_0$ et $\Gamma(h_0) = g_0$. Déduire de la question précédente l'expression de la concentration moléculaire volumique $n(h)$ d'un gaz parfait du mélange atmosphérique isotherme en fonction de h, n_0, h_0, g_0, R_T, m, k_B et T.

Montrer qu'à partir de ce résultat, on peut retrouver celui de la question B.1.4. si $h \ll (R_T + h_0)$.

B.2. On se propose d'étudier maintenant un modèle statique plus réaliste de l'atmosphère, dû à Jacchia, où ni température ni attraction terrestre ne sont a priori uniformes.

Ce modèle prend en compte T_{exo}, la température de l'exosphère, région de l'atmosphère située à des altitudes supérieures à 400 km, et T_{h_0}, la température à l'altitude $h_0 = 90$ km, qui vaut approximativement 180 K.

Dans ces conditions, selon Jacchia, à un instant donné, l'expression de température de l'atmosphère, pour des altitudes h supérieures à $h_0 = 90$ km, est :

$$T(h) = T_{exo} - (T_{exo} - T_{h_0}) \exp[-s(h - h_0)], \text{ avec T en K et s en km}^{-1} \text{ tel que :}$$

$$s = 0{,}0291 \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\frac{T_{exo} - 800}{750 + 1{,}722 \times 10^{-4}(T_{exo} - 800)^2}\right]^2\right\}.$$

B.2.1. En admettant que la température de l'exosphère peut varier entre 600 K et 2 000 K, dans quel intervalle la quantité 1/s varie-t-elle ?

B.2.2. En déduire que, au-dessus de 300 km, la température de l'atmosphère est sensiblement uniforme. Que vaut-elle ?

Donner l'allure de T (h) pou $T_{exo} = 2\,000$ K.

B.2.3. On admet maintenant que, pour chaque constituant, on peut écrire la relation simple suivante liant n (h), T (h) et la norme du champ de gravitation terrestre Γ (h) :

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dh} = -\left[\frac{m\,\Gamma(h)}{k_B T} + \frac{1}{T}\frac{dT}{dh}(1+\alpha)\right] \qquad (2)$$

où α est un facteur réel positif dépendant du gaz considéré.

En utilisant de nouveau le résultat de la question A.2.2., montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{n(h)}{n(h_0)}\left(\frac{T(h)}{T(h_0)}\right)^{1+\alpha} = \exp[-F(h)]$$

où F (h) est une fonction de h dont on donnera une expression intégrale, faisant intervenir le champ de température T (h).

Que devient l'équation (2) lorsque h est très supérieur à h_0 ?

B.3. **Propagation d'ondes électromagnétiques dans l'ionosphère.**

Au-dessus d'une altitude d'environ 80 km, les gaz neutres évoqués précédemment sont partiellement ionisés par le rayonnement solaire, créant ainsi un plasma.

Afin d'étudier la propagation d'ondes électromagnétiques dans cette zone, on assimile l'ionosphère à un plasma constitué d'ions positifs de charge e et d'un fluide parfait d'électrons de masse m_e et de charge – e.

La concentration locale électronique à l'instant t est notée $n(t,\vec{r})$ et la vitesse moyenne locale des électrons $\vec{v}(t,\vec{r})$. La valeur d'équilibre de $n(t,\vec{r})$, en l'absence de champ électromagnétique, est notée n_0 ; elle est supposée uniforme et constante.
Le fluide électronique est soumis à sa pression $p(t,\vec{r})$ qui vérifie l'équation d'état :

$p(t,\vec{r}) = \pi\,[n(t,\vec{r}), \sigma(t,\vec{r})]$ où σ et l'entropie (moyenne) par électron dans le plasma.

Enfin, les électrons ne sont supposés interagir avec les ions que par l'intermédiaire du champ électromagnétique régnant dans le plasma et l'écoulement du fluide électronique est supposé adiabatique.

B.3.1. Expliquer pourquoi on peut considérer, en première approximation, que les ions sont immobiles par rapport aux électrons.

La concentration $n(t,\vec{r})$ reste toujours proche de n_0. Expliquer pourquoi on peut négliger l'action du champ gravitationnel sur le mouvement local des électrons.

Ces simplifications seront adoptées dans toute la section B.3.

B.3.2. Exprimer, à chaque instant et pout tout point, la charge électrique volumique (*totale*) ρ et le vecteur densité de courant électrique associé $\vec{j}$ en fonction de n_0, $n(t,\vec{r})$ et $\vec{v}(t,\vec{r})$.

B.3.3. Établir l'équation de continuité traduisant la conservation locale de la charge électrique volumique.

B.3.4. Le fluide électronique, soumis à sa pression et à l'action d'un champ électromagnétique $\vec{E}(t,\vec{r})$, $\vec{B}(t,\vec{r})$ satisfait par ailleurs à l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v} = -\frac{1}{n\,m_e}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p - \frac{n\,e}{n\,m_e}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Donner la signification physique des différents termes de cette équation.

B.3.5. Écrire les équations de Maxwell (locales) vérifiées par le champ électromagnétique en considérant que les électrons et ions du plasma sont dans le vide.

B.3.6. Vérifier qu'en l'absence de champ électromagnétique ($\vec{E} = 0$; $\vec{B} = 0$) l'équilibre homogène caractérisé en particulier par la concentration uniforme n_0 satisfait bien à l'ensemble des équations écrites ci-dessus.

B.3.7. On linéarise les équations précédentes autour de la situation d'équilibre. On pose pour cela :

$n(t,\vec{r}) = n_0 + \zeta\, n_1(t,\vec{r})$; $p(t,\vec{r}) = p_0 + \zeta\, p_1(t,\vec{r})$; $\vec{v}(t,\vec{r}) = \vec{v_0} + \zeta\,\vec{v_1}(t,\vec{r})$;

$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E_0} + \zeta\,\vec{E_1}(t,\vec{r})$; etc. (certaines grandeurs affectées de l'indice 0 peuvent être nulles).

Dans ces expressions, ζ est un nombre réel positif très inférieur à l'unité tandis que les champs affectés de l'indice 1 sont bornés.

Justifier la relation : $p_1(t,\vec{r}) = \left[\frac{\partial \pi}{\partial n}(n_0)\right] \times n_1(t,\vec{r})$ où le coefficient $\left[\frac{\partial \pi}{\partial n}(n_0)\right]$ représente la valeur en n_0 de la dérivée partielle de la pression par rapport à la concentration volumique en électrons.

Donner alors le système d'équations obtenu en ne conservant que les termes d'ordre 1 par rapport à ζ dans les équations générales écrites en B.3.3., B.3.4. et B.3.5. Ces équations relient entre eux les champs $n_1(t,\vec{r})$, $\vec{v_1}(t,\vec{r})$, $\vec{E_1}(t,\vec{r})$ et $\vec{B_1}(t,\vec{r})$.

B.3.8. On admet que le gaz d'électrons se comporte, pour les applications spatiales considérées, comme un gaz parfait de concentration volumique $n(t, \vec{r})$ dont le rapport γ des capacités thermiques à pression constante et à volume constant vaut 3.

Dans ces conditions, montrer que $\left[\frac{\partial \pi}{\partial n}(n_0)\right] = \gamma \frac{p_0}{n_0} = 3\, k_B\, T$.

B.3.9. On cherche une solution au système obtenu en B.3.7. sous la forme :

$$n_1(t, \vec{r}) = n_{1_0} \exp\left[i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right] ; \; \vec{E_1}(t, \vec{r}) = \vec{E_{1_0}} \exp\left[i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right], \text{etc.}$$

Quelle est la nature de l'onde correspondante ? Quelle est sa longueur d'onde ?

B.3.10. Montrer que l'on a alors :

$$n_{1_0} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{v_{1_0}}}{\omega}\, n_0 \qquad (1)$$

$$\vec{v_{1_0}} = -\frac{i\, e\, \vec{E_{1_0}}}{m_e\, \omega} + \frac{3\, k_B\, T}{m_e} \frac{n_{1_0}}{n_0} \frac{\vec{k}}{\omega} \qquad (2)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E_{1_0}} = \frac{i\, e}{\varepsilon_0}\, n_{1_0} \qquad (3)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B_{1_0}} = 0 \qquad (4)$$

$$\vec{k} \wedge \vec{E_{1_0}} = \omega\, \vec{B_{1_0}} \qquad (5)$$

$$\vec{k} \wedge \vec{B_{1_0}} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E_{1_0}} + i\, e\, n_0\, \mu_0\, \vec{v_{1_0}} \qquad (6)$$

B.3.11. En déduire que l'amplitude vectorielle $\vec{E_{1_0}}$ du champ électrique vérifie l'équation :

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2)\, \vec{E_{1_0}} + \left(c^2 - \frac{3\, k_B\, T}{m_e}\right)\left(\vec{k} \cdot \vec{E_{1_0}}\right) \vec{k} = 0.$$

Exprimer ω_p^2 en fonction de n_0, e, m_e et ε_0. Calculer ω_p pour $n_0 = 10^4\ \text{cm}^{-3}$.

B.3.12. En déduire, pour les ondes transverses où le champ électrique est perpendiculaire au vecteur $\vec{k}$, la relation de dispersion liant ω à ce vecteur.

B.3.13. Quel domaine de fréquences (correspondant à $\omega > \omega_p$ ou à $\omega < \omega_p$) doit-on utiliser pour les communications par ondes transverses entre un satellite et la Terre ? Que se passe-t-il si l'on émet une onde n'appartenant pas à ce domaine de fréquences ?

B.3.14. Soit une onde transverse de fréquence 400 MHz se propageant dans l'ionosphère pour laquelle on prend $n_0 = 1{,}0 \times 10^4\ \text{cm}^{-3}$.

En utilisant la relation de dispersion établie en B.3.12., justifier qu'il ait été raisonnable de considérer n_0 comme uniforme dans l'étude qui précède.

B.3.15. L'équation trouvée au B.3.11. admet aussi des solutions longitudinales pour lesquelles $\vec{E}$ et $\vec{k}$ sont parallèles.

Quelle est la relation de dispersion pour ces ondes ?

Peut-on envisager des communications entre un satellite ou une fusée (navette) et la Terre fondées sur ce type d'ondes ? Justifier votre réponse.

PARTIE C

MOUVEMENT D'UN SATELLITE SOUS L'INFLUENCE DU CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

En première approximation, on considère comme isolé le système constitué par la Terre, supposée de symétrie sphérique et le satellite de centre d'inertie S, en orbite autour de celle-ci.

C.1. Discuter les limites de cette approximation. Peut-on fixer une durée caractéristique au-delà de laquelle elle n'est plus acceptable ?

C.2. On repère les positions respectives du centre T de la Terre et de S dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$ d'origine O, par les vecteurs $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_S$ et l'on assimile donc les deux mobiles à des points matériels T et S. La masse de la Terre et celle du satellite sont notées, respectivement, m_T et m_S.

On note $\vec{r} = \vec{R}_S - \vec{R}_T$ le vecteur donnant la position relative de S par rapport à T et, I étant le centre d'inertie du système Terre–satellite, on pose $\vec{R} = \overrightarrow{OI}$.

C.2.1. Établir les équations différentielles vectorielles du mouvement de la Terre et du satellite.

C.2.2. Montrer que ces deux équations couplées sont équivalentes à deux autres équations découplées qui fixent les évolutions respectives de $\vec{R}$ et de $\vec{r}$.

C.2.3. Intégrer l'équation différentielle du mouvement de $\vec{R}$ et interpréter le résultat.

C.2.4. Quelle est la nature du référentiel $\mathcal{R}'$ de centre I dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}$?
Montrer que dans $\mathcal{R}'$, la quantité de mouvement du point matériel S est égale à celle d'un point matériel fictif S′ de vecteur position $\overrightarrow{IS'} = \overrightarrow{TS} = \vec{r}$ et de masse μ que l'on définira.
C'est ce point matériel fictif que l'on considérera désormais : montrer qu'il est soumis à une force centrale $\vec{F}$ que l'on caractérisera.

C.3.

C.3.1. On pose $\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{v}$. En utilisant le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu\vec{v}$, montrer que le mouvement relatif décrit par le vecteur position $\vec{r}$ est plan.
Compte tenu de ce résultat, on introduit des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan auquel appartient $\vec{r}$, de manière à suivre plus aisément l'étude du mouvement relatif de S par rapport à T.

C.3.2. Écrire les équations différentielles vérifiées par $r = |\vec{r}|$ et θ.

C.3.3. Montrer que la quantité $r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ reste constante au cours du mouvement. On notera C cette constante. Interpréter physiquement cette relation mathématique.

C.4. En utilisant le résultat de la question C.3.3., montrer que r (t) vérifie une équation différentielle du second ordre qui, après intégration, se ramène à une équation différentielle du premier ordre dont on donnera la signification énergétique. À cet effet, on notera E_0 l'énergie mécanique totale du point matériel S′ dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

C.5.

C.5.1. Lorsque la dérivée temporelle $\left(\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}\right)$ de r est strictement positive, on peut exprimer la différentielle dt sous la forme dt = I (r) dr. Déterminer la fonction I (r) en utilisant la constante C et l'énergie mécanique E_0.
Exprimer I (r) lorsque cette dérivée est strictement négative et commenter le cas où $\dot{r} = 0$.

C.5.2. On se limite désormais au cas où $\dot{r} > 0$. En utilisant les résultats établis aux questions C.3.3. et C.5.1., montrer que l'on peut écrire :

$$d\theta = J(r)\,dr$$

où $J(r)$ est une fonction de r que l'on explicitera.

C.5.3. Afin d'établir l'équation de la trajectoire de S', on pose $K = G\, m_T\, m_S$ et $z = \dfrac{K}{C} - \dfrac{\mu\, C}{r}$.

Montrer que l'équation différentielle $d\theta = J(r)\,dr$ permet d'écrire :

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 - z^2}}\,.$$

Exprimer α en fonction de μ, C, K et E_0.

C.6. Exprimer $(\theta - \theta_0)$ en fonction de z et de α et montrer qu'en choisissant convenablement l'origine des angles θ, l'expression obtenue peut être mise sous la forme classique :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}\,.$$

Donner l'expression du paramètre p et celle de l'excentricité e de la trajectoire en fonction de μ, C, K et E_0.

C.7. Montrer que le caractère borné ou non borné de la trajectoire obtenue avec le modèle simple d'interaction gravitationelle utilisé ne dépend que de l'énergie mécanique E_0 du satellite.