EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 1:
METHODE D'EULER
courbes intégrales passant par $M_0(0,y_0)$

Problème: ***Données:*** $I=[0,x_0]$, $x_0 \in R$ et $x_0>0$.

$$f : \begin{array}{l} I \times R \to R \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{array}$$

$y_0 \in R$

But: Rechercher les fonctions $y : \begin{array}{l} I \to R \\ y \mapsto y(x) \end{array}$ de classe C^1 telle que:

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ \forall x \in I, y'(x) = f(x, y(x)) \end{cases}$$

Résultat: Si f est continue,

f lipschitzienne en y, il existe M de R tel que pour tout x de I, pour tout y_1 et y_2 de R, $|f(y_1) - f(y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$

alors l'équation différentielle admet une unique solution.

Méthode numérique d'Euler: On fixe n dans N^*.

On approche la solution exacte y du problème par une fonction approchée Z que l'on calcule aux points $x_i = i.\frac{x_0}{n}$, avec $i \in [0;n]$ par l'algorithme suivant:

$$\begin{cases} Z_0 = y_0 \\ Z_{i+1} = Z_i + h.f(x_i, Z_i) \ \text{ pour tout } i \in [0; n-1] \end{cases} \quad \text{avec } h = \frac{x_0}{n}.$$

Travail: $1)\begin{cases} x_0 = 1, \textit{puis } 2, \text{etc} \\ y_0 = 0 \\ f(x,y) = y + 1 \end{cases}$

-Calculer la solution exacte du problème.
 nb:voir aide sur dsolve.

-Calculer la solution approchée pour n=10, 20, 100.
 Pour ce faire, vous utiliserez la procédure z dont le corps est défini ci-dessous.

a) Soit A une table dont les élémnents sont numérotés de 0 à n-1 telle que $A[i]=Z_i$.
 La table A sert donc pour stocker les valeurs Z_i , valeurs dont on aura besoin pour la représentation graphique de la solution approchée.

z:=proc(n,xo,yo,f,A)

local i,x,h,A ;	i est le compteur de la boucle for x et h représentent les réels x_i et h de l'énoncé
option remember;	cette option évite à Maple de recalculer les A[i], ces derniers étant définis par récurrence

…………………

end:

b)Utilisez cette procédure pour déterminez les tables A,B,C , qui reçoivent les Z_i respectivement pour n=10, n=20, n=100.

-Afficher graphiquement la représentation de y et Z(Z est interpolée linéairement entre les valeurs Z_i et Z_{i+1} avec $i \in [0; n-1]$).

dans le package plots, que l'on charge avec l'intruction with(plots); on trouve les intructions suivantes:

plot([[x_1,y_1],[x_2,y_2],...,[x_n,y_n]]) ; trace la ligne polygonale joignant les points $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$,...,$M_3(x_n,y_n)$.

g1:=; plot([[x_1,y_1],[x_2,y_2],...,[x_n,y_n]]) stocke le tracé , dans l'optique de l'utilisation de display.

display([g1,g2,g3,g4]) trace la même fenêtre, les courbes g1,g2,...

enfin seq([x[i], y [i]], i=0..n) restitue la séquence [x_1,y_1],[x_2,y_2],...,[x_n,y_n]

$$2)\begin{cases} x_0 = 1, \textit{puis } 2, \text{etc} \\ y_0 = -10 \\ f(x,y) = \sin x \end{cases}$$

même travail qu'au 1) pour 2), 3), 4)

idem

$$3)\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0{,}5 \\ f(x,y) = xy^2 + y \end{cases}$$

La solution exacte est y: $\begin{array}{l} [0, x_0] \to \mathrm{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1 - x + e^{-x}} \end{array}$

idem

tournez s.v.p

$$4)\begin{cases} x_0 = 0{,}99 \\ y_0 = 1 \\ f(x,y) = \dfrac{-x^2 y - y^2 + 2x}{1 - x^3} \end{cases}$$

la solution exacte est y: $\begin{array}{l} [0; x_0] \to \mathrm{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x + 1} \end{array}$