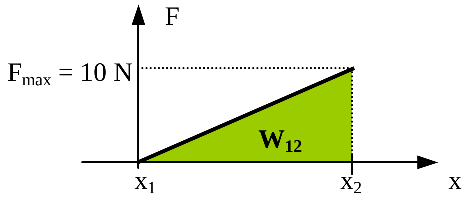
Corrigé des exercices du cours n° 2

Exercice 1.

La travail W_{12} reçu par l'air est l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} F(x)\cdot dx$, c'est-à-dire la surface décrite ci-dessous :

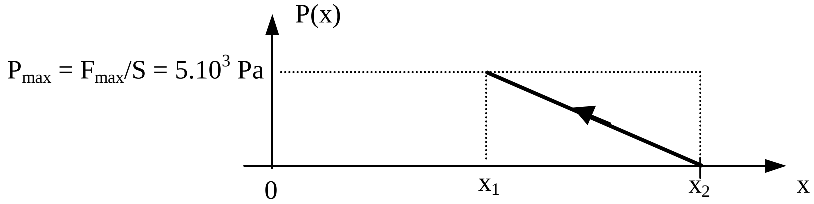


Ainsi **W_{12}** = surface du triangle vert = $\boxed{W_{12} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\times F_{max}}$ $= \frac{1}{2}(20.10^{-2})\times 10 = 10.10^{-2}\times 10 \approx$ **1,00 J**

Exercice 2.

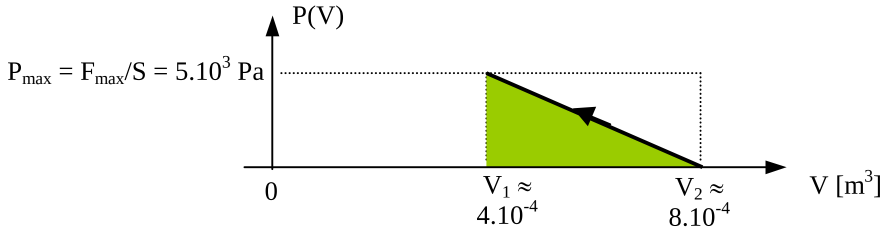
1.

P = F/S, il suffit donc de changer l'échelle verticale, remplacer F par F/20.10^{-4} (**attention** : 20 cm² = 20.10^{-4} m²), d'où le graphique :



2.

On a pour la position x le volume V de cylindre donné par V = S × x, il suffit donc de remplacer l'échelle horizontal des x par S × x = 20.10^{-4} × x, d'où le graphe ci-dessous :



Remarque : l'expression de P en fonction de V est donnée par $P = -\left(\frac{P\,max}{V_2 - V_1}\right)V + 2P_{max}$

3.

On a $W_{12} = -\int_{V_2}^{V_1} PdV$ (voir cours)

1^ère méthode : calcul algébrique (pour les matheux)

$$W_{12} = -\int_{V_2}^{V_1} PdV = -\int_{V_2}^{V_1}\left[-\left(\frac{P\,max}{V_2 - V_1}\right)V + 2P_{max}\right]dV = \left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{P_{max}}{V_2 - V_1}\right)V^2 + 2P_{max}\cdot V\right]_{V_1}^{V_2} = 4 - 3 = \mathbf{1\ J}$$

2^ème méthode : calcul géométrique (pour les rapides)

W_{12} = surface verte = (base × hauteur) / 2 = [(V_2 – V1) × P_{max}] /2 = 4.10^{-4} × 5.10^3 / 2 = 2/2 = **1 J**

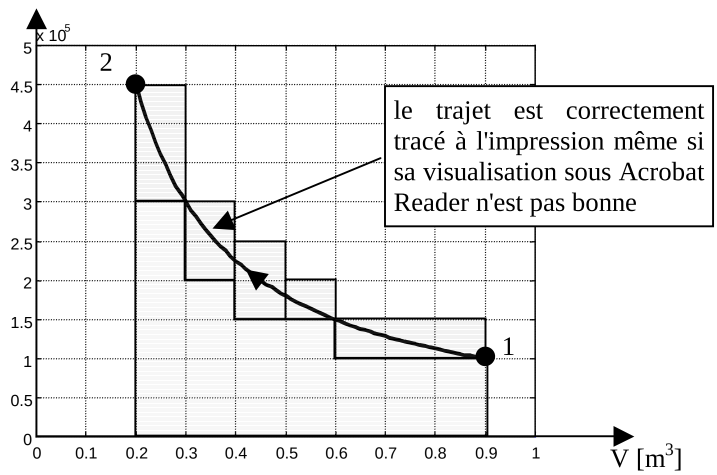
On retrouve heureusement le même résultat qu'à l'exercice 1 : l'air *reçoit* un travail (ou *quantité de travail*) de 1 J.

Exercice 3.

1.

$P.V = Cte \Rightarrow P1.V1 = P2.V2 \Leftrightarrow \boxed{V2 = \frac{P1.V1}{P2}} \approx \frac{1.10^5 \times 0{,}9}{4{,}5.10^5} \approx 0{,}200 \text{ m}^3$

$P.V = Cte \Leftrightarrow P = \frac{Cte}{V} \Leftrightarrow \boxed{P = \frac{P1 \times V1}{V}} \Leftrightarrow P = \frac{1.10^5 \times 0{,}9}{V} \approx \frac{0{,}9.10^5}{V}$ permet de tracer P(V)



2.

Sur le graphique, un carreau = $0{,}1 \times 0{,}5.10^5$ Pa = 5 kJ
On lit 22 carreaux pleins (en gris clair) et 11 carreaux tronqués (en gris foncé), soit environ 22 + 11/2 ≈ 27,5 carreaux qui représentent la surface décrite par la transformation de l'état 1 à l'état 2. Cela représente donc une énergie telle que $\boxed{W_{12} \approx 27{,}5 \times 5 \approx 138 \text{ kJ}}$

Par le calcul : $W_{12} = -\int_{V1}^{V2} P.dV = -\int_{V1}^{V2} \frac{P.V}{V}.dV = -\int_{V1}^{V2} \frac{Cte}{V}.dV = -Cte\int_{V1}^{V2} \frac{1}{V}.dV = -Cte\left[\ln V\right]_{V1}^{V2} = -P1.V1 \times (\ln V2 - \ln V1)$

ainsi $\boxed{W_{12} = P1.V1 \times \ln\left(\frac{V1}{V2}\right)}$ (attention au changement de signe), on a alors $W_{12} \approx 1.10^5 \times 0{,}9 \times \ln(0{,}9/0{,}2) \approx 135$ kJ

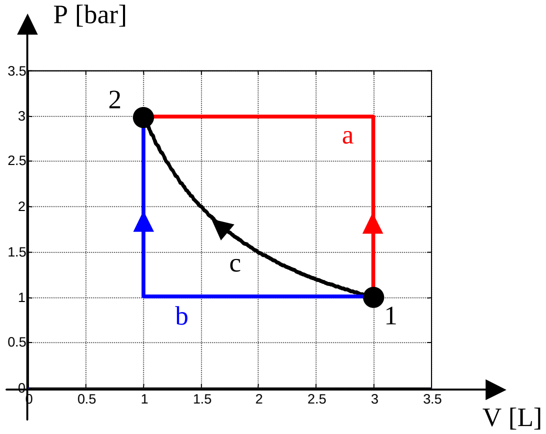
L'erreur faite par le manque de précision graphique n'est pas si élevée que ça !

3.

Oui car le travail est <u>reçu</u> par l'air (signe positif de W_{12} car il y a diminution de volume : le gaz reçoit cette énergie, il faut donc qu'on lui la fournisse de l'extérieur si on veut la réaliser).

Exercice 4.

1.



chemin a = 1ère transformation (isochore suivie de l'isobare)
chemin b = 2ème transformation (isobare puis isochore)
chemin c = 3ème transformation ($P.V = C^{te}$, on verra au cours 4 qu'il s'agit d'une isotherme en fait), tracé par $P = C^{te}/V = P_1.V_1/V = 3 \times 1/V \Leftrightarrow P = 3/V$ (avec P en bar et V en L)

2.

le calcul de W_{1a2} et W_{1b2} est facile car cela revient à déterminer la surface d'un rectangle.
Nous avons $W_{1a2} = 3.Po \times 2Vo \Leftrightarrow \boxed{W_{1a2} = 6.Po.Vo} \approx 6 \times 1.10^5 \times 1.10^{-3} \approx$ 600 J
de même $W_{1b2} = Po \times 2.Vo \Leftrightarrow \boxed{W_{1b2} = 2.Po.Vo} \approx 2 \times 1.10^5 \times 1.10^{-3} \approx$ 200 J

On ne peut pas éviter le calcul de l'intégral pour W_{1c2} : $W_{1c2} = -\int_{V1}^{V2} P.dV = -\int_{V1}^{V2} \frac{C^{te}}{V}.dV = -\int_{V1}^{V2} \frac{P_1 \times V_1}{V}.dV = -P1 \times V1 \int_{V1}^{V2} \frac{1}{V}.dV$ car $P1 \times V1 = C^{te}$, ainsi $W_{1c2} = -P1 \times V1(\ln V2 - \ln V1) \Leftrightarrow \boxed{W_{1c2} = P_1.V_1.\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} \approx 1.10^5 \times 3.10^{-3} \times \ln\left(\frac{3.10^{-3}}{1.10^{-3}}\right) \approx$ 329 J

Remarque 1 : il vaut mieux écrire $\ln(V_1/V_2)$ que $\ln V_1 - \ln V_2$ car on peut souvent simplifier une fraction.
Remarque 2 : on verra au cours n° 3 comment on peut concrètement réaliser ces 3 types de transformation.
Remarque 3 : W_{12} dépend du chemin suivi (a, b ou c) comme la chaleur (contrairement à l'énergie interne qui est une fonction d'état : on verra cela ultérieurement).
Remarque 4 pour les matheux, totalement hors programme des BTS : les variations élémentaires de travail sont notées δW (ou δQ pour la chaleur), contrairement à une variation élémentaire de température notée dT (ou dU pour l'énergie interne). Cela donne, en intégrant, $W = \int_1^2 \delta W$ alors que l'on n'a pas $T = \int_1^2 dT$ mais $\underline{\Delta}T = T_2 - T_1 = \int_1^2 dT$. On dit que δW est une *forme différentielle* et que dT est une *différentielle totale exacte*. En d'autres termes, W n'est pas une *fonction d'état* (on ne parle pas du travail d'un corps, mais de travail <u>pour amener</u> un corps <u>de l'état 1 à l'état 2</u>). On parle de travail, et non pas de "*variation de travail*", entre un état 1 et un état 2, alors que l'on parle bien de *variation de température* et non pas de "*température*" entre un état 1 et un état 2.
En d'autres termes, en intégrant la forme différentielle d'une grandeur physique on obtient la grandeur physique elle-même, alors qu'en intégrant la différentielle totale exacte on obtient une <u>variation</u> de la grandeur physique.
En pratique on aura donc besoin de connaître <u>exactement</u> le type de transformation pour calculer W échangé entre un état 1 et un état 2. Alors que pour la température il suffit de connaître l'état 1 et l'état 2 pour calculer sa variation au cours de la transformation (seul l'observation du début et de la fin de la transformation est nécessaire, on pendra donc en général la transformation élémentaire la plus facile à calculer, même si cela ne correspond pas à la réalité).

3.

A priori, la transformation b nécessite le minimum d'apport de travail de l'extérieur. On verra qu'ici la chaleur rejetée par le corps soumis à cette transformation est minimale, égale à -200 J. Ce n'est pas forcément la transformation que l'on choisira si l'on veut récupérer de la chaleur !

Exercice 5.

1.

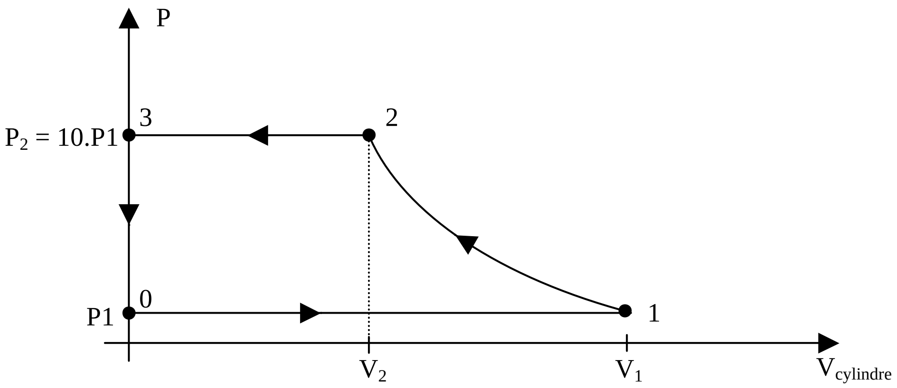
Voir exercice précédent : $\mathbf{W_{cycle}}$ = $W_{1a2} - W_{2b1}$ = 600 – 200 = **400 J**

2.

$W_{cycle} > 0 \Rightarrow$ cette énergie doit donc être apportée au gaz (par l'extérieur) pour que le cycle soit réalisé, cette énergie sera par exemple apportée sous forme électrique ou sous forme mécanique. Remarquez que le cycle est décrit dans le sens trigonométrique (anti-horaire), il s'agit donc bien dans cycle résistant qui *résiste* lorsqu'on essaye de le réaliser.

Exercice 6.

1.



Remarque : il s'agit du volume du cylindre et non du volume du gaz (un gaz n'a pas de volume nul !) : il s'agit ici d'un diagramme de Watt et non de Clapeyron.

2.

Les calculs suivants sont relativement compliqués pour les BTS, ils sont néanmoins demandés aux épreuves de BTS : il faut donc savoir les faire tout seul !

$$\left.\begin{array}{l} T_1^{\gamma}.P_1^{1-\gamma} = T_2^{\gamma}.P_2^{1-\gamma} \\ P_1.V_1^{\gamma} = P_2.V_2^{\gamma} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma} = \left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^{1-\gamma} \\ \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} = \dfrac{P_1}{P_2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} T_2^{\gamma} = T_1^{\gamma}.\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^{1-\gamma} \\ V_2^{\gamma} = V_1^{\gamma}.\dfrac{P_1}{P_2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} T_2 = T_1\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ V_2 = V_1\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{l} T_2 \approx 300\times\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{1-1,4}{1,4}} \\ V_2 \approx 0,25.10^{-3}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{1}{1,4}} \end{array}$$

On a alors $T_2 \approx 579$ K et $V_2 \approx 48,3$ mL

3.

$W = W_{0\to1} + W_{1\to2} + W_{2\to3} + W_{3\to0}$ or $W_{3\to0} = 0$ (pas de variation de volume)

ainsi W = $-(P_1\times V_1) + \int_{V_1}^{V_2} -P.dV + P_2.V_2$ or on a $P.V^{\gamma} = C^{te} = P_1.V_1^{\gamma}$ pour la transformation $1\to2$, d'où $W = -(P_1 \times V_1) + \int_{V_1}^{V_2} -\frac{C^{te}}{V^\gamma}.dV + P_2.V_2 = -(P_1 \times V_1) + -C^{te}\int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\gamma}.dV + P_2.V_2 = -(P_1 \times V_1) + P_1.V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\gamma}.dV + P_2.V_2 = -(P_1 \times V_1) + P_1.V_1^\gamma \left[\frac{1}{\gamma - 1} V^{1-\gamma}\right]_{V_1}^{V_2} + P_2.V_2$ ainsi : $\boxed{W = -P_1.V_1 + \frac{P_1.V_1^\gamma}{\gamma - 1}\left[V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right] + P_2.V_2} \approx 81{,}5\ \text{J}$

Le travail est positif : il est donc absorbé par le gaz qui agit comme un frein vis à vis de l'extérieur : il faut lui fournir ce travail au système. Remarquer que le travail $W_{0\to 1}$ est développé par le piston, et non par le gaz, de même que le travail $W_{2\to 3}$.

Remarque : c'est la convention opposée qui est, en général, utilisée en électricité : une machine qui fonctionne en frein (on dit plus souvent, et improprement, en *génératrice*) développe une énergie mécanique négative ($C_{utile} \times \Omega$). Cela vient de la convention dite "égoïste" utilisée en thermodynamique : ce que l'on reçoit est compté positivement. En électricité on se préoccupe davantage à l'aspect *rendement* d'une machine : on prend généralement une convention récepteur pour la machine étudiée et on ne change pas de signe lors de la conversion *énergie mécanique* en *énergie électrique* : un frein absorbe de l'énergie mécanique ($C_{utile} \times \Omega < 0$) et la transforme en énergie électrique ($U \times I < 0$)