

**Correction des sujets de thermodynamique (feuille d'exercices n° 7).**

**Exercice 1.**

**1<sup>er</sup> principe** :  $W = -Q_1 - Q_2$  car  $\Delta U = 0$  sur un cycle, d'où  $\eta = |(-Q_1 - Q_2)/Q_2| = |-1 - Q_1/Q_2|$ . Compte tenu du fait que  $Q_1/Q_2 < 0$  et que  $|Q_1/Q_2| < 1$  (plus de chaleur absorbée que de chaleur rejetée pour produire du travail) on obtient, en posant  $|Q_1/Q_2| \triangleq \varepsilon < 1$ , que  $|-1 - Q_1/Q_2| = |-1 + \varepsilon| = 1 - \varepsilon = 1 + Q_1/Q_2$  **(1)**.

Or  $Q_1 = m.Cv.(T_1 - T_4)$  et  $Q_2 = m.Cv.(T_3 - T_2)$  d'où  $Q_1/Q_2 = (T_1 - T_4)/(T_3 - T_2)$  **(2)**

de plus  $T_1.V_1^{\gamma-1} = T_2.V_2^{\gamma-1}$  et  $T_3.V_3^{\gamma-1} = T_4.V_4^{\gamma-1}$  or  $V_1 = V_4$  et  $V_2 = V_3$  d'où  $T_3.V_2 = T_4.V_1^{\gamma-1}$ . On en déduit que :

$$T_2 = T_1.(V_1/V_2)^{\gamma-1} = T_1.\tau^{\gamma-1} \text{ (pour } T_1 = 20^\circ\text{C} \approx 293 \text{ K et } \tau \approx 6 \text{ on obtient } T_2 \approx 293 \times 6^{0.4} \approx 600 \text{ K} \approx 327^\circ\text{C)}$$

$$T_3 = T_4.(V_1/V_2)^{\gamma-1} = T_4.\tau^{\gamma-1} \text{ (or } T_3 = P_3/P_2 \times T_2 \approx 22.10^5/12,3.10^5 \times 600 \approx 1074 \text{ K} \approx 800^\circ\text{C}).$$

$$\text{d'où (2)} \rightarrow Q_1/Q_2 = (T_1 - T_4)/(T_4.\tau^{\gamma-1} - T_1.\tau^{\gamma-1}) = (T_1 - T_4)/[\tau^{\gamma-1} (T_4 - T_1)] = -\tau^{1-\gamma}$$

$$\text{ainsi (1)} \rightarrow \eta = 1 - \tau^{1-\gamma}$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\tau^{\gamma-1}}$$

$\eta$  est d'autant plus grand que le taux de compression volumétrique  $\tau$  est élevé.

$$\text{Ici } \tau \triangleq V_1/V_2 = 600/100 \approx 6 \Rightarrow \eta = 1 - \frac{1}{6^{1.4-1}} \approx 51 \%$$

En pratique  $\eta \approx 35 \%$ , voire moins (viscosité).

**Exercice 2.**

1.

- AB = détente isochore.
- BC = expansion isotherme.
- CD = compression isochore.
- DA = compression isotherme.

2.

2.1.

**Pour les travaux :**

$$\boxed{W_{AB} = 0 \text{ et } W_{CD} = 0} \text{ (transformations isochores).}$$

$$W_{BC} = \int_{V_{\min}}^{V_{\max}} -P.dV \text{ or } P.V = R.T \text{ pour une mole, d'où } W_{BC} = -R.T_1 \int_{V_{\min}}^{V_{\max}} \frac{1}{V}.dV = -R.T_1 [\ln V]_{V_{\min}}^{V_{\max}}$$

$$\text{d'où } \boxed{W_{BC} = -R.T_1.\ln(V_{\max}/V_{\min})}$$

$$\text{de même } \boxed{W_{DA} = -R.T_2.\ln(V_{\min}/V_{\max})}$$

**Pour les quantités de chaleur :**

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} \text{ (1er principe de la thermo avec } W_{AB} = 0) \text{ or } \Delta U_{AB} = Cv.(T_1 - T_2) \text{ d'où } \boxed{Q_{AB} = Cv.(T_1 - T_2)}$$

$$\text{de même } \boxed{Q_{CD} = Cv.(T_2 - T_1)}$$

Comme AD et BC sont des isothermes on a  $Q_{BC} = -W_{BC}$  et  $Q_{DA} = -W_{DA}$

$$\text{d'où } \boxed{Q_{BC} = R.T_1.\ln(V_{\max}/V_{\min})} \text{ et } \boxed{Q_{DA} = R.T_2.\ln(V_{\min}/V_{\max})}$$

2.2.

$$W_{AB} = 0$$

$$Q_{AB} = 21 \times (276 - 293) = -357 \text{ J}$$

$$W_{BC} = -8,32 \times 276 \times \ln 3 \approx -2523 \text{ J}$$

$$Q_{BC} = -W_{BC} \approx 2523 \text{ J}$$

2.3.

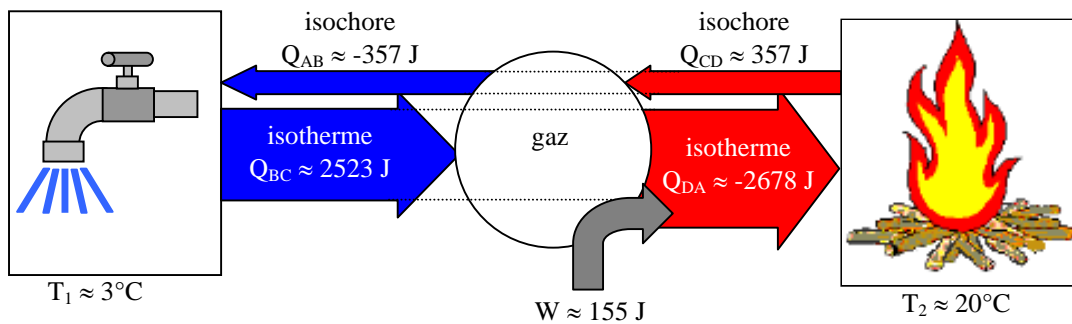
$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{BC} + W_{DA}$$

d'où  $W = -R.T_1 \ln(V_{\max}/V_{\min}) - R.T_2 \ln(V_{\min}/V_{\max}) = -R.T_1 \ln(V_{\max}/V_{\min}) + R.T_2 \ln(V_{\max}/V_{\min})$

Ainsi  $W = R \cdot \ln(V_{\max}/V_{\min}) \times (T_2 - T_1)$

On trouve  $W = 8,32 \times \ln 3 \times (293 - 276) \approx 155 \text{ J}$   
Le cycle est récepteur car  $W$  est positif (de plus le cycle est décrit dans le sens trigonométrique).

On peut représenter sur un schéma les différentes transformations :



avec  $Q \triangleq Q_{AB} + Q_{BC}$   
et  $Q' \triangleq Q_{CD} + Q_{DA}$

Calculons, pour s'amuser (-;-) les entropies échangées par les thermostats : vérifient-elles l'égalité de Clausius qui assure la réversibilité du cycle ? On a  $\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{BC}}{T_1} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{DA}}{T_2} \triangleq \frac{Q}{T_1} + \frac{Q'}{T_2} = -2,51 \text{ J/K} \neq 0$  : **le cycle ditherme n'est absolument pas réversible, quoi qu'en dise l'énoncé.** D'où vient cette contradiction entre les calculs et l'énoncé ?

En fait le cycle de Stirling peut être considéré comme :

- 1/ soit réversible (dans ce cas il n'est plus considéré comme ditherme car lors des transformations isochores le système doit être en contact avec des thermostats de température infiniment proche). Dans ce cas les entropies échangées par les sources ne correspondent pas à  $Q/T_1$  et  $Q'/T_2$  puisqu'il n'y a pas 2 sources (il faudrait calculer les variations d'entropie du système lors de chaque transformation, égales aux variations d'entropie des thermostats puisqu'il y a réversibilité). Le rendement sera cependant maximal (car réversibilité) =  $1 - T_{\min}/T_{\max}$  (je n'ose pas dire  $T_1$  et  $T_2$  car il y a une infinité de thermostats).
- 2/ soit ditherme (dans ce cas les transformations isochores sont irréversibles) : dans ce cas les entropies échangées par les sources valent  $Q/T_1$  et  $Q'/T_2$  : c'est le calcul ci-dessus qui est mené et qui prouve l'irréversibilité du processus.

De toute façon je n'aime pas ce genre de sujet où le fonctionnement de la machine n'est même pas décrit !!! Comment assurer un tel cycle ? Je vous engage à taper "machine de Stirling" sur un moteur de recherche internet et vous comprendrez mieux de quoi il s'agit.

**3.**

- Pour effectuer la transformation AB il faut refroidir le gaz, ce refroidissement n'est possible que parce que la source froide entre en contact avec le gaz,  $Q_{AB}$  est donc rejetée à la source froide et non prise de la source froide,  $Q_{AB}$  n'intervient donc pas dans le  $Q_1$  qui doit être prise de la source froide (énoncé).
- Pour effectuer la transformation BC il faut que le gaz absorbe de la chaleur, or il n'est en contact qu'avec la source froide (puisque'il s'agit d'une isotherme), cette chaleur est donc prise à la source froide,  $Q_{BC}$  intervient donc dans  $Q_1$ .

- Pour effectuer la transformation CD il faut absorber de la chaleur, cette chaleur est absorbée lors de la mise en contact du gaz avec la source chaude, cette chaleur est donc prise à la source chaude et donc  $Q_{CD}$  n'intervient pas dans  $Q_1$ .
- Pour effectuer la transformation DA il faut rejeter de la chaleur, or le gaz n'est en contact qu'avec la source chaude, cette chaleur est rejetée alors à la source chaude et donc  $Q_{DA}$  n'intervient pas dans  $Q_1$ .

Finalement  $Q_1$  est due uniquement à la transformation BC et donc  $Q_1 = Q_{BC} \approx 2523$  J par cycle et par mole.

on remarque que cette machine prend de la chaleur d'une source froide grâce à un apport de travail : elle fonctionne donc comme une **pompe à chaleur** (on s'en serait douté étant données les valeurs des températures :  $T_1 \approx 3^\circ\text{C}$  qui correspond à une température extérieure en période froide, et  $T_2 \approx 20^\circ\text{C}$  qui correspond à la température d'un appartement).

Note : en considérant le cycle ditherme (cas adopté par l'énoncé et cas réellement réalisé en pratique) son efficacité vaut  $e = \left| \frac{Q_2}{W} \right|$  avec  $Q_2$  la chaleur fournie à la source chaude ( $Q_2 = Q_{CD} + Q_{DA} = -2678 + 357 \approx -2321$  J), d'où  $e \approx \frac{2321}{155} \approx 15$  ( $e_{\max} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \approx 17$  serait obtenue avec une infinité de sources ou un four qui "accompagne" l'évolution de température du système, de manière à assurer la réversibilité du cycle de Stirling).

### Exercice 3.

1.

a.

$$P.V = n.R.T \text{ (gaz parfait)} \Rightarrow P_1.V_1 = R.T_1 \text{ pour } n = 1 \text{ mole} \Rightarrow \boxed{V_1 = R.T_1/P_1} \approx 8,32 \times 330 / 1.10^5 \approx 27 \text{ litres}$$

b.

$$A_1A_2 \text{ adiabatique} \Rightarrow P_1.V_1^\gamma = P_2.V_2^\gamma \Leftrightarrow P_2 = P_1.(V_1/V_2)^\gamma \Leftrightarrow \boxed{P_2 = P_1.x^\gamma} \approx 1.10^5 \times 14^{1.40} \approx 40.10^5 \text{ Pa}$$
$$P_2.V_2 = R.T_2 \Rightarrow T_2 = P_2.V_2/R \text{ or } V_2 \equiv V_1/x \text{ d'où } \boxed{T_2 = P_2.V_1/(x.R)} \approx 40.10^5 \times 27.10^{-3}/(14 \times 8,32) \approx 948 \text{ K}$$

2.

$$P_3.V_3 = R.T_3 \Rightarrow V_3 = R.T_3/P_3 \text{ et puisque } P_3 = P_2 \text{ on a } \boxed{V_3 = R.T_3/P_2} \approx 8,32 \times 2260/40.10^5 \approx 4,7 \text{ litres}$$
$$Q_{23} = n.C_p.(T_3 - T_2) \text{ car détente isobare, or } n = 1 \text{ d'où } \boxed{Q_{23} = C_p.(T_3 - T_2)} \approx 29 \times (2260 - 948) \approx 38 \text{ kJ}$$

3.

$$A_3A_4 \text{ est adiabatique d'où } P_3.V_3^\gamma = P_4.V_4^\gamma \Leftrightarrow P_4 = P_3.(V_3/V_4)^\gamma \text{ or } V_4 = V_1 \text{ et } P_3 = P_2 \text{ d'où } \boxed{P_4 = P_2.(V_3/V_1)^\gamma}$$
$$\approx 40.10^5 \times (4,7.10^{-3}/27.10^{-3})^\gamma \approx 3,4.10^5 \text{ Pa}$$
$$P_4.V_4 = R.T_4 \text{ pour une mole, d'où } T_4 = P_4.V_4/R \text{ or } V_4 = V_1 \text{ d'où } \boxed{T_4 = P_4.V_1/R} \approx 3,4.10^5 \times 27.10^{-3}/8,32 \approx 1113 \text{ K}$$

4.

a.

$$Q_{41} = n.C_v.(T_1 - T_4) \text{ car la transformation est isochore. Or } C_v = C_p/\gamma \text{ et } n = 1 \text{ d'où } \boxed{Q_{41} = C_p(T_1 - T_4)/\gamma} \approx 29 \times (330 - 1113)/1,4 \approx -16 \text{ kJ attention au signe -}.$$

b.

$W_{\text{cycle}} = \Delta U_{\text{cycle}} - Q_{\text{cycle}}$  or on a toujours  $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$ , d'où  $W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}} = -(Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41})$ , or  $Q_{12} = 0$  et  $Q_{34} = 0$  car ces transformations sont adiabatiques, d'où  $W_{\text{cycle}} = -(Q_{23} + Q_{41}) \approx -(38.103 - 16.103) = -22 \text{ kJ}$   $W_{\text{cycle}}$  est bien négatif, comme prévu.

c.

$$\eta \equiv \left| \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{23}} \right| = 22.10^3 / 38.10^3 \approx 57 \% \text{ (note : } Q_{23} = \text{chaleur absorbée de la source chaude)}$$

**Exercice 4.**

Le cycle est réversible : il n'est donc pas ditherme puisque ce n'est pas un cycle de Carnot.

1.

BC est une compression isochore.

2.

$$P_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \Rightarrow n = \frac{P_A \cdot V_A}{(R \cdot T_A)} \approx 1.10^5 \times 1.10^{-2} / (8,31 \times 300) \approx 0,4 \text{ mole}$$

3.

a.

$$P_B \cdot V_B^\gamma = P_A \cdot V_A^\gamma \text{ car AB est adiabatique} \Rightarrow P_B = P_A (V_A / V_B)^\gamma = 1.10^5 \times (1/2)^{1,4} \approx 38.10^3 \text{ Pa}$$

$$P_B \cdot V_B = n \cdot R \cdot T_B \Rightarrow T_B = \frac{P_B \cdot V_B}{(n \cdot R)} \approx 38.10^3 \times 2.10^{-2} / (0,4 \times 8,31) \approx 227 \text{ K}$$

b.

$$P_C \cdot V_C = n \cdot R \cdot T_C \text{ or } V_C = V_B \text{ et } T_C = T_A \text{ (car CA est une isotherme) d'où } P_C = \frac{n \cdot R \cdot T_A}{V_B} \approx 0,4 \times 8,31 \times 300 / 2.10^{-2} \approx 50.10^3 \text{ Pa}$$

4.

$Q_{BC} + W_{BC} = \Delta U_{BC}$  (1<sup>er</sup> principe de la thermo) et on sait que  $\Delta U_{BC} = n \cdot C_v \cdot (T_C - T_B)$   
comme  $W_{BC} = 0$  (transfo isochore) on en déduit que  $Q_{BC} = n \cdot C_v \cdot (T_C - T_B)$  et puisque  $C_v = C_p / \gamma$  et  $T_C = T_A$  on en déduit que  $Q_{BC} = n \cdot C_p / \gamma \times (T_C - T_B) \approx 0,4 \times 29 / 1,4 \times (300 - 227) \approx 604 \text{ J}$

5.

a.

$$\Delta U_{CA} = 0 \text{ car } \Delta U_{CA} = n \cdot C_v \cdot (T_A - T_C) = 0 \text{ car } T_A = T_C \text{ (puisque AC est une isotherme)}$$

b.

$W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = \Delta U_{\text{cycle}} = 0$  quel que soit le cycle

$$\text{d'où } W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}} \Leftrightarrow W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = -Q_{AB} - Q_{BC} - Q_{CA} \Leftrightarrow W_{AB} = -Q_{AB} - Q_{BC} - Q_{CA} - W_{BC} - W_{CA}$$

$$\text{or } Q_{AB} = 0 \text{ (AB est adiabatique) et } W_{BC} = 0 \text{ (BC étant isochore) d'où } W_{AB} = -Q_{BC} - Q_{CA} - W_{CA}$$

$$\text{d'autre part } Q_{CA} + W_{CA} = \Delta U_{CA} \text{ (1<sup>er</sup> principe)} = 0, \text{ (voir question précédente), d'où } W_{AB} = -Q_{BC} - (Q_{CA} + W_{CA}) = -Q_{BC} - \Delta U_{CA} \Leftrightarrow W_{AB} = -Q_{BC} \approx -604 \text{ J}$$

c.

Le signe - indique que la transformation AB (et non le cycle) est *motrice* : il y a "rejet" de travail à l'extérieur. Il faut remarquer cependant que le cycle est, quant à lui, *résistant* (parcouru dans le sens trigonométrique).

**Exercice 5.**

1.

L'état final du gaz est l'état 3

$$P_3 \cdot V_3 = n \cdot R \cdot T_3 \Rightarrow \boxed{n = P_3 \cdot V_3 / (R \cdot T_3)} \approx 10 \cdot 10^5 \times 20 \cdot 10^{-3} / [8,32 \times (273 + 57)] \approx 7 \text{ moles}$$

2.

$$P_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1 \Rightarrow \boxed{V_1 = n \cdot R \cdot T_1 / P_1} \approx 7 \times 8,32 \times (273 + 27) / 1 \cdot 10^5 \approx 182 \text{ litres}$$

3.

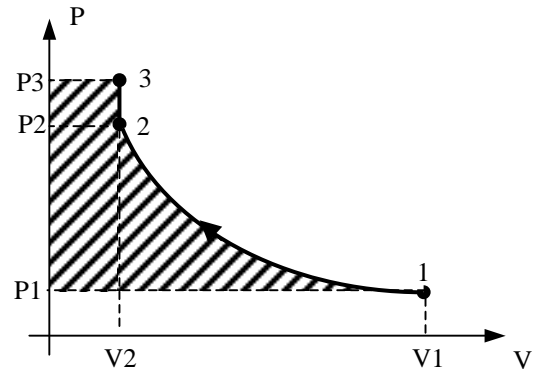
$$1-2 \text{ est une transformation isotherme} \Rightarrow \boxed{T_2 = T_1} \approx 273 + 27 \approx 300 \text{ K}$$

$$2-3 \text{ est une transformation isochore} \Rightarrow \boxed{V_2 = V_3} \approx 20 \text{ litres}$$

$$\text{on en déduit } \boxed{P_2 = n \cdot R \cdot T_2 / V_2} \text{ (car gaz parfait)} \Rightarrow P_2 \approx 7 \times 8,32 \times 300 / 20 \cdot 10^{-3} \approx 873 \cdot 10^3 \text{ Pa } (\approx 9 \text{ bar})$$

4.

On peut représenter les transformations dans le plan P(V) :



Ici il y a un travail de transvasement de l'air dans la bouteille grâce au travail de la pompe : en plus du travail de transvasement, la pompe effectue un travail qui comprime l'air : le travail total  $W_t$  est réalisé en  $\Delta t \approx 1 \text{ min}$  par la pompe. On a alors  $\underline{P = W_t / \Delta t}$

le travail de la pompe  $W_t$  correspond à la surface hachurée (voir cours n° 3). On a  $W_t = (P_3 \times V_2) + W_{12} - P_1 \times V_1 \Leftrightarrow \underline{W_t} \equiv (P_3 \times V_2) + n \cdot R \cdot T_1 \times \ln(P_2 / P_1) - P_1 \times V_1$

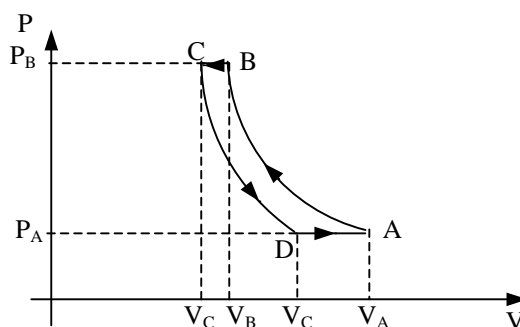
$$\text{d'où } \underline{P} = \frac{(P_3 \cdot V_2) + n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln(P_2 / P_1) - P_1 \cdot V_1}{\Delta t} \approx$$

$$\frac{(10 \cdot 10^5 \times 20 \cdot 10^{-3}) + 7 \times 8,32 \times 300 \times \ln(873 \cdot 10^3 / 1 \cdot 10^5) - (1 \cdot 10^5 \times 182 \cdot 10^{-3})}{60} \approx 690 \text{ W}$$

Je trouve que cette question est malheureusement "limite" du programme !

### Exercice 6.

1.



Remarque : le cycle ici est modifié par rapport à celui donné sur le document - réponse (qui est malheureusement faux). En outre le cycle ne peut pas être réversible car il entre en contact avec 2 sources de chaleur seulement, ce qui ne peut pas assurer la réversibilité des transformations isobares.

2.

$$P_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \text{ or } n = 1 \text{ mole d'où } \boxed{V_A = R \cdot T_A / P_A} \approx 8,32 \times 298 / 1.10^5 \approx 25 \text{ L}$$
$$P_B \cdot V_B^\gamma = P_A \cdot V_A^\gamma \Rightarrow \boxed{V_B = V_A \cdot (P_A / P_B)^{1/\gamma}} \approx 25 \cdot 10^{-3} \times (1.10^5 / 2,2 \cdot 10^5)^{1/1,4} \approx 14 \text{ L}$$

3.

$$P_B \cdot V_B = R \cdot T_B \Rightarrow \boxed{T_B = P_B \cdot V_B / R} \approx 2,2 \cdot 10^5 \times 8 \cdot 10^{-3} / 8,32 \approx 376 \text{ K}$$

de même  $T_D = P_D \cdot V_D / R = P_A \cdot V_D / R$ , reste à calculer  $V_D$

On sait que  $T_C = 340 \text{ K}$  et que  $P_C = P_B \approx 2,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , puisque  $P_C \cdot V_C = R \cdot T_C$  on en déduit que  $\boxed{V_C = R \cdot T_C / P_C} \approx 13 \text{ L}$   
et puisque  $P_D \cdot V_D^\gamma = P_C \cdot V_C^\gamma$  on en déduit que  $V_D = V_C \cdot (P_C / P_D)^{1/\gamma} \Rightarrow V_D = R \cdot T_C / P_B \times (P_B / P_A)^{1/\gamma} \Rightarrow T_D = P_A \cdot [R \cdot T_C / P_B \times (P_B / P_A)^{1/\gamma}] / R \Leftrightarrow \boxed{T_D = P_A \times T_C / P_B \times (P_B / P_A)^{1/\gamma}} \approx 1.10^5 \times 340 / 2,2 \cdot 10^5 \times (2,2 \cdot 10^5 / 1.10^5)^{1/1,4} \approx 271 \text{ K}$

Rq : on a alors  $V_D = R \cdot T_D / P_D \approx 22 \text{ L} > V_C$ , cela prouve que la figure a donnant l'allure du cycle est fausse.

4.

4.1.

$Q_1 \equiv$  chaleur échangée lors de la transformation BC  $\Rightarrow \boxed{Q_1 = C_p \cdot (T_C - T_B)}$  puisque la transformation est isobare et que  $n = 1$  mole. D'où  $Q_1 \approx 29,1 \times (340 - 376) \approx -1059 \text{ J}$  : la chaleur est rejetée à la source chaude.

de même  $\boxed{Q_2 = C_p \cdot (T_A - T_D)} \approx 29,1 \times (298 - 271) \approx 786 \text{ J}$  : la chaleur est absorbée de la source froide.

4.2.

1er principe  $\Rightarrow W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = \Delta U_{\text{cycle}} = 0 \Leftrightarrow W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}} = -(Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA})$  or  $Q_{AB} = 0$  et  $Q_{CD} = 0$  (transfo adiabatiques), d'où  $W_{\text{cycle}} = -(Q_{BC} + Q_{DA}) \Leftrightarrow \boxed{W_{\text{cycle}} = -Q_1 - Q_2} \approx 1059 - 786 \approx 274 \text{ J}$  : la pompe à chaleur nécessite un apport de travail.

5.

5.1.

$\boxed{\varepsilon \triangleq \frac{Q_1}{W_{\text{cycle}}}} \approx 1059/274 \approx 3,9$  or pour un cycle réversible ditherme (sources de chaleur de températures  $T_A$  et  $T_C$ ) on a  $\varepsilon_{\text{max}} = T_C / (T_C - T_A) = 340 / (340 - 298) \approx 8,1$  : le cycle n'est donc pas réversible, quoi qu'en dise l'énoncé, une fois de plus.

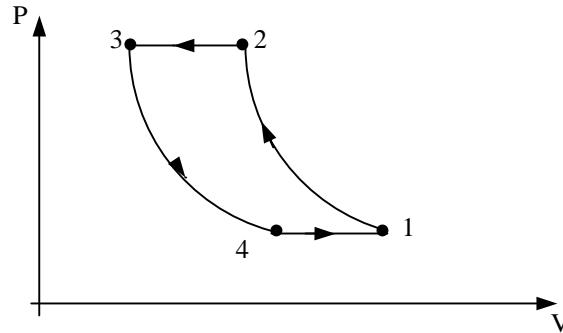
5.2.

Le choix de cette définition vient du fait que l'efficacité est une sorte de rendement, c'est - à - dire un rapport  $\frac{\text{énergie restituée}}{\text{énergie dépensée}}$ , l'énergie restituée au local à chauffer étant  $Q_1$  et l'énergie dépensée étant l'énergie fournie à

la pompe pour effectuer le travail  $W_{\text{cycle}}$ , on obtient bien  $\varepsilon \triangleq \frac{Q_1}{W_{\text{cycle}}}$

**Exercice 7.**

1.



Le cycle est forcément décrit dans le sens trigonométrique car il s'agit d'une pompe à chaleur (le cycle est donc résistant : il nécessite un apport de travail pour se réaliser). La réversibilité du cycle implique qu'il n'est pas ditherme, et donc que le circuit de chauffage et les effluents industriels ne constituent pas des sources de chaleur, ce dont je doute en pratique : leur température est certainement relativement constante, égale à  $T_1$  (source chaude) et  $T_3$  (source froide), ce qui implique que le cycle est ditherme et donc qu'il n'est certainement pas réversible...

2.

$P.V^\gamma = \text{Cte}$  pour une adiabatique  $\Rightarrow P^{1/\gamma}.V = \text{Cte}$  (1) or  $P.V = nRT$  (2) pour un gaz parfait, d'où, en faisant le rapport (1) / (2) on obtient  $P^{1-\gamma}.T = \text{Cte}$  pour une adiabatique, d'où  $P_1^{1-\gamma}.T_1 = P_2^{1-\gamma}.T_2$  et donc  $T_2 = T_1 \times \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$   
 $\approx 310 \times (1.10^5/2.10^5)^{(1-1.4)/1.4} \approx 378 \text{ K}$   
 Cette question était relativement difficile pour des BTS.

3.

$Q_{12} = 0$  et  $Q_{34} = 0$  car ces transformations sont adiabatiques.  
 $Q_{23} = m.c_p.(T_3-T_2)$  car la transformation 2-3 est isobare, de même  $Q_{41} = m.c_p.(T_1-T_4)$   
 on trouve  $Q_{23} \approx 1 \times 1000 \times (330 - 378) \approx -48 \text{ kJ}$  et  $Q_{41} \approx 1 \times 1000 \times (310 - 271) \approx 39 \text{ kJ}$

4.

Sur tout cycle  $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$  car la température finale est toujours égale à la température initiale pour un cycle.  
 1<sup>er</sup> principe :  $W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = \Delta U_{\text{cycle}} \Rightarrow W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = 0$ .

5.

$W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}}$  d'où  $W_{\text{cycle}} = -(Q_{23} + Q_{41}) \approx -(-48.10^3 + 39.10^3) \approx 9 \text{ kJ}$  : travail absorbé (cycle résistant, ce qui est normal !).

6.

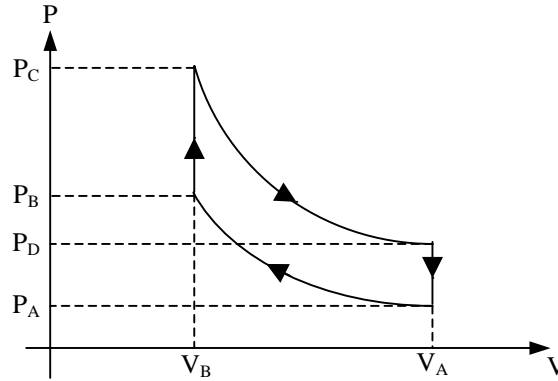
$$e = \frac{|Q_{23}|}{|W_{\text{cycle}}|} \approx 48.10^3 / 9.10^3 \approx 5,3$$

remarque : pour une pompe à chaleur ditherme fonctionnant entre les sources  $T_1$  et  $T_3$  on a  $e_{\text{max}} = T_3 / (T_3 - T_1) = 330 / (330 - 310) \approx 16,5$  obtenu pour un cycle réversible... preuve que le cycle n'est pas réversible ici.

**Exercice 8.**

Remarque :  $P_C = 62 \text{ bar}$  : je ne connais pas de moteur qui subisse une telle pression (la technologie actuelle des voitures le permet-elle ? avis à ceux qui m'écriront...)

1.



2.

$$P_A \cdot V_A = R \cdot T_A \text{ pour une mole, d'où } \boxed{V_A = R \cdot T_A / P_A} \approx 8,32 \times 300 / 1.10^5 \approx 25 \text{ L}$$

$$\boxed{V_B = V_A / 7} = 3,5 \text{ L}$$

3.

$$\text{AB est adiabatique, d'où } P_A \cdot V_A^\gamma = P_B \cdot V_B^\gamma \Rightarrow \boxed{P_B = P_A \cdot (V_A / V_B)^\gamma} \approx 1.10^5 \times 7^{1,4} \approx 15.10^5 \text{ Pa}$$

$$P_B \cdot V_B = R \cdot T_B \Rightarrow \boxed{T_B = P_B \cdot V_B / R} \approx 15.10^5 \times 3,5.10^{-3} / 8,32 \approx 653 \text{ K}$$

4.

$$\boxed{Q_{AB} = 0} \text{ et } \boxed{Q_{CD} = 0} \text{ car AB et CD sont adiabatiques.}$$

$$Q_{BC} = C_v \cdot (T_C - T_B) \text{ et } Q_{DA} = C_v \cdot (T_A - T_D) \text{ car ces transformations sont isochores. On a de plus } C_v = C_p / \gamma \text{ d'où :}$$

$$\boxed{Q_{BC} = C_p / \gamma \times (T_C - T_B)} \text{ et } \boxed{Q_{DA} = C_p / \gamma \times (T_A - T_D)}$$

on trouve  $Q_{BC} = 29 / 1,4 \times (2650 - 653) \approx 41 \text{ kJ}$  et  $Q_{DA} \approx 29 / 1,4 \times (300 - 1210) \approx -19 \text{ kJ}$

$$1^{\text{er}} \text{ principe } \Rightarrow W + Q = 0 \text{ sur un cycle } \Leftrightarrow W = -Q \Leftrightarrow \boxed{W = -(Q_{BC} + Q_{DA})} \approx -(41.10^3 - 19.10^3) \approx -22 \text{ kJ}$$

signe -  $\Rightarrow$  le cycle est bien moteur.

5.

$$\eta = -\frac{-22.10^3}{41.10^3} \approx 0,54$$

**Exercice 9.**

1.

$$\boxed{Q_{\text{eau}} = M \cdot c \cdot \Delta T} \approx 1000 \times 4190 \times (358 - 288) \approx 293 \text{ MJ}$$

$$\boxed{P = Q_{\text{eau}} / \Delta t} \approx 293.10^6 / 3600 \approx 81,5 \text{ kW}$$



2.

La chaudière doit restituer  $Q_{\text{eau}}$  joules par heure à l'eau, il faut donc que la chaudière absorbe  $Q_{\text{eau}}/0,80 \approx 366,6$  MJ par heure provenant du fuel. Il faut donc brûler (en 1 heure) une masse de fuel  $m = 366,6 \cdot 10^6 / 4,2 \cdot 10^7 \approx 8,7$  kg  
La consommation horaire de fuel est donc de 8,7 kg.

3.

pour transformer m kg de vapeur d'eau de chaudière en eau liquide il faut retirer la chaleur  $Q_1 = m \times L_c$   
attention au signe de  $L_c$  : cette chaleur sera rejetée, elle sera donc négative ! (l'énoncé appelle cette chaleur "chaleur absorbée" et impose implicitement la convention de signe).

4.

La chaleur à enlever pour abaisser la température de l'eau de chaudière de  $100^\circ\text{C}$  à  $85^\circ\text{C}$  vaut  $Q_2 = m \cdot c \cdot (\theta_2' - \theta_1')$   
Cette chaleur n'est pas absorbée, mais rejetée par l'eau de la chaudière :  $Q_2$  est  $< 0$  car  $\theta_2' < \theta_1'$

5.

a.

$Q_{\text{systeme}} = 0$  (adiabatique)  $\Rightarrow Q_{\text{eau}} + Q_1 + Q_2 = 0$   
 $Q_{\text{eau}}$  est la chaleur récupérée par l'eau de distribution provenant de m kg d'eau de la chaudière.

b.

Il faut donc que  $Q_1 + Q_2 = -Q_{\text{eau}} \Leftrightarrow m \times L_c + m \cdot c \cdot (\theta_2' - \theta_1') = -Q_{\text{eau}} \Leftrightarrow m = -\frac{Q_{\text{eau}}}{L_c + c \cdot (\theta_2' - \theta_1')} \approx$   
 $-\frac{293 \cdot 10^6}{-2257,2 + 4190 \cdot (358 - 373)} \approx 4500$  kg.

6.

a.

T.M.T.  $\equiv [\text{Ca}^{2+}] + [\text{Mg}^{2+}]$   
en mole d'ions par litres T.M.T.  $\approx 1,5 \cdot 10^{-3} + 0,5 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3}$  moles d'ions par litre.  
en équivalents par litres : T.M.T.  $\approx 2 \times 2 \cdot 10^{-3} \approx 4 \cdot 10^{-3}$  équivalents par litres  
en °F on a TMT =  $5 \times 4 \cdot 10^{-3} / 1 \cdot 10^{-3} \approx 20$  °F

Cette eau est dure (TMT > 10 °F)

b.

une eau trop dure bouche les canalisations (par dépôt de calcaire).

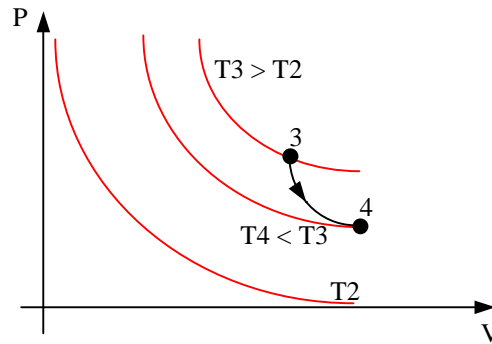
## Exercice 10.

1.

1-2 est adiabatique  $\Rightarrow T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \approx 300 \times 14^{1,4-1} \approx 862$  K

2.

T3 est la température la plus élevée car les isothermes sont toutes des hyperboles placées les unes au dessus des autres quand T augmente :



On a vu que  $T_2 > T_1$ . On a aussi  $T_3 > T_2$  puisque les états 2 et 3 correspondent à la même pression. On sait de plus que la transformation 3-4 est adiabatique, donc de pente plus élevée qu'une isotherme : T4 est donc forcément sur une isotherme située en dessous de l'isotherme T3 : d'où  $T_3 > T_4$

3.

$Q_{12} = 0$  car 1-2 est adiabatique

$Q_{23} = n.C_p.(T_3 - T_2)$  car 2-3 est isobare  $\Rightarrow$  pour  $n = 1$  mole on a  $Q_{23} = \gamma.C_v.(T_3 - T_2) \approx 1,4 \times 20,8 \times (1340 - 862) \approx 14$  kJ

$Q_{34} = 0$  car 3-4 est adiabatique

$Q_{41} = C_v.(T_1 - T_4)$  car 4-1 est isochore  $\Rightarrow Q_{41} \approx 20,8 \times (300 - 556) \approx -5$  kJ

4.

$\Delta U_{\text{cycle}} = 0$  pour tout cycle

1<sup>er</sup> principe :  $W + Q = \Delta U_{\text{cycle}} = 0$

$W = -Q \Leftrightarrow W = -(Q_{23} + Q_{41}) \approx -(14.10^3 - 5.10^3) \approx -8,6$  kJ : le travail est négatif, preuve qu'il s'agit bien d'un cycle moteur !

5.

$$\eta \triangleq \left| \frac{\text{travail fourni}}{\text{chaleur absorbée}} \right| \Leftrightarrow \eta = \left| \frac{W}{Q_{23}} \right| \approx 8,6.10^3 / 14.10^3 \approx 0,62$$

6.

En une heure le moteur consomme 1 L  $\Rightarrow$  il y a un dégagement de chaleur  $Q_{23} = 1 \times 45.10^3$  kJ par heure. Comme le rendement est de  $\eta \approx 0,45$  le travail fourni par heure est de  $W = \eta \times Q_{23} = 0,45 \times 45.10^3 \approx 20.10^3$  kJ.

Sa puissance est alors  $P = W/\Delta t = 20.10^6 / 3600 \approx 5625$  W (soit environ 7 chevaux).

## Exercice 11

1.

a.

$$n = m/M \approx 2250/121 \approx 18,6 \text{ moles}$$

b.

$$P_1.V_1 = n.R.T_1 \Rightarrow V_1 = n.R.T_1/P_1 \approx 18,6 \times 8,32 \times 272 / 1,9.10^5 \approx 221 \text{ L}$$

2.

$$1-2 \text{ est adiabatique} \Rightarrow P_2 \cdot V_2^\gamma = P_1 \cdot V_1^\gamma \Rightarrow V_2 = V_1 \cdot \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \approx 221 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{1,9 \cdot 10^5}{8,5 \cdot 10^5} \right)^{\frac{1}{1,2}} \approx 63,5 \text{ L}$$

$$\text{gaz parfait} \Rightarrow P_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2 \Rightarrow T_2 = P_2 \cdot V_2 / (n \cdot R) \approx 8,5 \cdot 10^5 \times 63,5 \cdot 10^{-3} / (18,6 \times 8,32) \approx 349 \text{ K}$$

3.

a.

Dans le condenseur la pression du gaz ne varie pas (ce n'est ni un détendeur, ni un compresseur)  $\Rightarrow$  la transformation 2-3 est isobare, d'où  $Q_a = n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2) \approx 18,6 \times 49,9 \times (310 - 349) \approx -36,3 \text{ kJ}$

b.

Ici il y a liquéfaction, donc rejet de chaleur  $\Rightarrow Q_b = -m \cdot L \approx -2,25 \times 130 \approx -293 \text{ kJ}$   
Attention : l'unité de L impose l'unité de m qui doit être exprimée en kg !

c.

$$Q_{23} = Q_a + Q_b \approx -36,3 - 293 \approx -329 \text{ kJ}$$

d.

Le signe négatif de  $Q_{23}$  indique que le fréon perd de la chaleur, ce qui est normal puisqu'il est refroidi par le ventilateur. C'est l'air qui récupère cette chaleur.

4.

Pour abaisser de  $\Delta T$  la température de m kg d'eau, il faut lui retirer la chaleur  $m \times C_{\text{eau}} \times \Delta T$ , cette chaleur doit être fournie en 1 min à l'évaporateur qui nécessite  $Q_{41} \approx 240 \text{ kJ}$ , il faut donc, en une minute, apporter une masse

$$m = \frac{Q_{41}}{C_{\text{eau}} \cdot \Delta T} \approx 240 \cdot 10^3 / (4180 \times 5) \approx 11,5 \text{ kg (soit 11,5 L) en 1 min, soit un débit max } D_{\text{max}} = 11,5 \text{ L/min}$$

## Exercice 12.

Les transformations s'effectuent à pression constante sous l'action d'un asservissement.

1.

$$P \cdot V_1 = R \cdot T_1 \text{ pour une mole, d'où } V_1 = R \cdot T_1 / P \approx 8,31 \times 298 / 6,2 \cdot 10^5 \approx 4 \text{ L}$$

2.

2.1.

$$I = U / R_0 \approx 20 / 100 \approx 200 \text{ mA}$$

2.2.

$Q = P \times \Delta t \Rightarrow Q = R \cdot I^2 \times \Delta t \approx 100 \times (200 \cdot 10^{-3})^2 \times (9 \times 60) \approx 2160 \text{ J}$ , toute la chaleur dissipée par la résistance en 9 min sert à échauffer l'enceinte.

2.3.1.

transformation à pression constante  $\Rightarrow Q = n \cdot C_p \cdot \Delta T$ , pour une mole  $n = 1 \Rightarrow C_p = Q / (T_2 - T_1) \approx 2160 / (373 - 298) \approx 29 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

2.3.2.

$$P_2 \cdot V_2 = R \cdot T_2 \text{ pour une mole} \Rightarrow V_2 = R \cdot T_2 / P \approx 8,32 \times 373 / 6,2 \cdot 10^5 \approx 5 \text{ L}$$

3.

3.1.

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P.dV \text{ or } P = \text{Cte} \Rightarrow W = -P. \int_{V_1}^{V_2} dV \Rightarrow \boxed{W = -P(V_2 - V_1)}$$

3.2.

$$W \approx -6,2.10^5 \times (5.10^{-3} - 4.10^{-3}) \approx -627 \text{ J}$$

3.3.

$W < 0 \Rightarrow$  le gaz a fourni du travail à l'extérieur, il est donc moteur.

4.

$$1^{\text{er}} \text{ principe} \Rightarrow \boxed{\Delta U = W + Q} \approx -627 + 2160 \approx 1533 \text{ J}$$

$$\text{gaz parfait} \Rightarrow \text{pour } n = 1 \text{ mole on a } \Delta U = C_v.\Delta T \Rightarrow \boxed{C_v = \Delta U / (T_2 - T_1)} \approx 1533 / (373 - 298) \approx 20,4 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Remarque :  $C_p/C_v = 29/20,4 \approx 1,40 \equiv \gamma$ , ce qui est un résultat connu pour l'air.