Résolution numérique d'une équation différentielle
Méthode d'EULER

Principe de la méthode d'EULER :

Cas d'une équation différentielle du premier ordre dont la forme mathématique est :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

A partir de la connaissance de la valeur de y = y_0 pour une valeur de x = x_0, on peut calculer la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en ce point soit $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$. La valeur estimée de y pour x = x_0 + dX sera prise égale à y_0+dY = y_0+$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ dx.

<u>C'est une méthode itérative.</u>

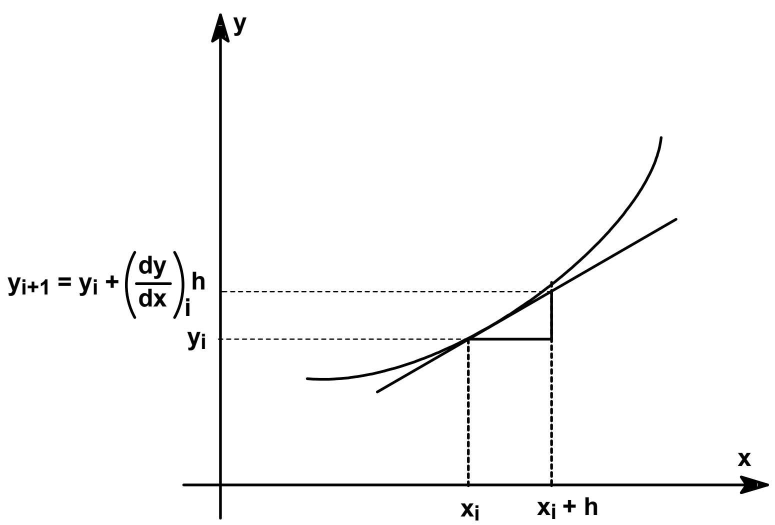
La valeur y_{i+1} est déterminée en ajoutant Δy_i à la valeur y_i .

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \Delta x \times f(x_i, y_i)$$

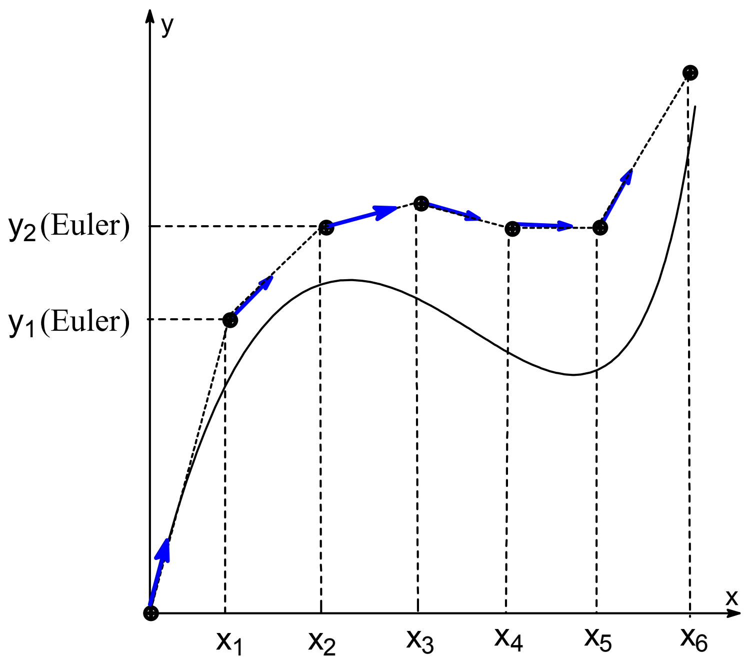
Si on note h le pas de discrétisation en x, la méthode d'EULER définit deux suites :

- une première qui définit les valeurs de x :
  terme initial : x_0
  relation de récurrence : $x_{i+1} = x_i + h$

- une deuxième qui permet d'évaluer les valeurs de y :
  terme initial : y_0
  relation de récurrence : $y_{i+1} = y_i + h \times f(x_i, y_i)$



On remarquera que les valeurs estimées obtenus seront d'autant plus proches des valeurs exactes que le pas h est plus petit.



La courbe en trait plein correspond à la solution analytique.

Exemple mathématique : considérons l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = -2x.y$ avec $y_{(x=0)}=1$

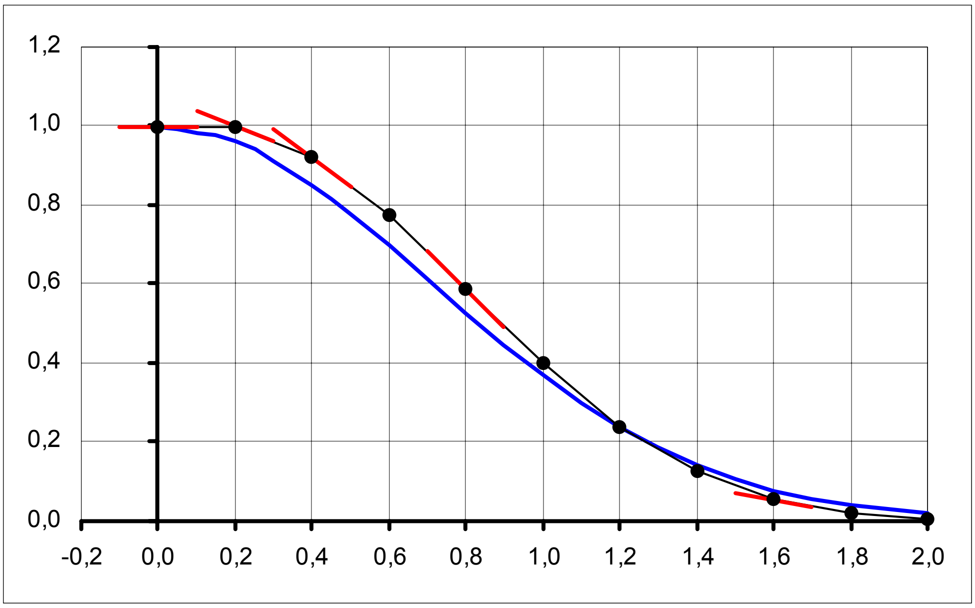
La solution analytique est : $y = \exp(-x^2)$

i	x_i	$y_i = \exp(-x_i^2)$
0	0	1
1	0,1	0,9900
2	0,2	0,9608
3	0,3	0,9139
4	0,4	0,8521
5	0,5	0,7788

Méthode d'EULER : à compléter ligne par ligne

i	x_i	y_i	$\Delta y = -2 \times x_i \times y_i \times \Delta x$	$Y_{i+1} = y_i + \Delta y$
0	0	1	$-2\times0\times1\times0{,}2 = 0$	1
1	0,2	1	$-2\times0{,}2\times1\times0{,}2 = -0{,}08$	0,92
2	0,4	0,92	$-2\times0{,}4\times0{,}92\times0{,}2 = -0{,}15$	0,77
3	0,6	0,77		
4	0,8			
5	1,0			

L'exemple ci-dessous montre que la méthode d'EULER pourrait être mise en œuvre « à la main ».



La courbe en trait gras correspond à la solution exacte, les points correspondent aux valeurs obtenues par la méthode d'EULER. Le principe de la méthode d'EULER est rappelé par les segments.

Exercice Euler1 : reproduire la figure ci-dessus

1) Mettre en œuvre la méthode d'EULER avec EXCEL puis tracer « manuellement » un ou deux vecteurs tangents.

	A	B	C	D	E	F
	dy	**x**	**yexact**	**yeuler**		
5	=-2*D5*B5*dt	**0**	**=EXP(-B5^2)**	**1**	#N/A	#N/A
6	=-2*D6*B6*pas	**0,2**	**=EXP(-B6*B6)**	**=D5+A5**	#N/A	#N/A
7	=-2*D7*B7*pas	**0,4**	**=EXP(-B7*B7)**	**=D6+A6**	#N/A	#N/A
8	=-2*D8*B8*pas	**0,6**	**=EXP(-B8*B8)**	**=D7+A7**	#N/A	#N/A
9	=-2*D9*B9*pas	**0,8**	**=EXP(-B9*B9)**	**=D8+A8**	#N/A	#N/A
10	=-2*D10*B10*pas	**1**	**=EXP(-B10*B10)**	**=D9+A9**	#N/A	#N/A
11	=-2*D11*B11*pas	**1,2**	**=EXP(-B11*B11)**	**=D10+A10**	#N/A	#N/A
12	=-2*D12*B12*pas	**1,4**	**=EXP(-B12*B12)**	**=D11+A11**	#N/A	#N/A
13	=-2*D13*B13*pas	**1,6**	**=EXP(-B13*B13)**	**=D12+A12**	#N/A	#N/A
14	=-2*D14*B14*pas	**1,8**	**=EXP(-B14*B14)**	**=D13+A13**	#N/A	#N/A
15	=-2*D15*B15*pas	**2**	**=EXP(-B15*B15)**	**=D14+A14**	#N/A	#N/A
16	#N/A	**0**-pas/2	#N/A	#N/A	**YEuler**-dy	#N/A
17	#N/A	**0**+pas/s	#N/A	#N/A	**Yeuler**+dy	#N/A
18	#N/A	**0.2**-pas/2	#N/A	#N/A	#N/A	**YEuler**-dy
19	#N/A	**0.2**+pas/2	#N/A	#N/A	#N/A	**Yeuler**+dy

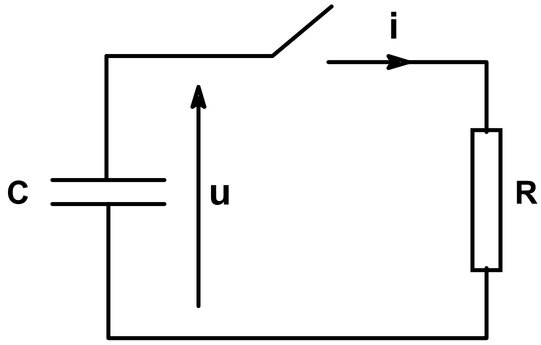
Les contenus des plages B16:B17 et E16:E17 permettent le tracé du vecteur tangent au point (0,1) ; ceux des plages B18:B19 et F18:F19 permettent le tracé du vecteur tangent au point (0,2 ;yeuler(0,2)) et ainsi de suite.

2) On pourra écrire une macro pour effectuer les calculs relatifs à tous les points.

Macro susceptible de réaliser les calculs correspondants :

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Dim pas, xx, xxx As Single
Dim compteur, ligne, indice As Integer
Dim x(20), dy(20), y(20), ddy, yy, yyy As Single

Worksheets("feuil2").Range("e5:o37").Value = "#N/A"
Worksheets("feuil2").Range("a16:o37").Value = "#N/A"

'************************************************
'Recherche de la valeur du pas d'intégration
pas = Worksheets("feuil2").Range("$b$2").Value

'************************************************
'Lecture des valeurs de x,y et dy et rangement dans un tableau
For compteur = 0 To 10
   ligne = compteur + 5
   x(compteur) = Worksheets("feuil2").Range("b" & ligne).Value
   y(compteur) = Worksheets("feuil2").Range("d" & ligne).Value
   dy(compteur) = Worksheets("feuil2").Range("a" & ligne).Value
Next compteur
'************************************************
'Pour tracer le vecteur tangent en un point il faut déterminer
'les coordonnées de ses deux extrémités
'xi-pas/2, yi-dy/2 et xi+pas/2, yi+dy/2
'on pourra ensuite tracer le segment correspondant à
'condition de placer les 2 ordonnées dans une même colonne

For compteur = 0 To 20
If compteur Mod 2 = 0 Then
   indice = Int(compteur / 2)
   xx = x(indice) - pas / 2
   xxx = x(indice) + pas / 2
   ddy = dy(indice)
   yy = y(indice) - ddy / 2
   yyy = y(indice) + ddy / 2
   Worksheets("feuil2").Range("b" & compteur + 16).Value = xx
   Worksheets("feuil2").Range("b" & compteur + 17).Value = xxx
   Worksheets(2).Cells(compteur + 16, indice + 5).Value = yy
   Worksheets(2).Cells(compteur + 17, indice + 5).Value = yyy
   End If
Next compteur

End Sub
```

Exercice Euler2 : Décharge d'un condensateur dans une résistance.



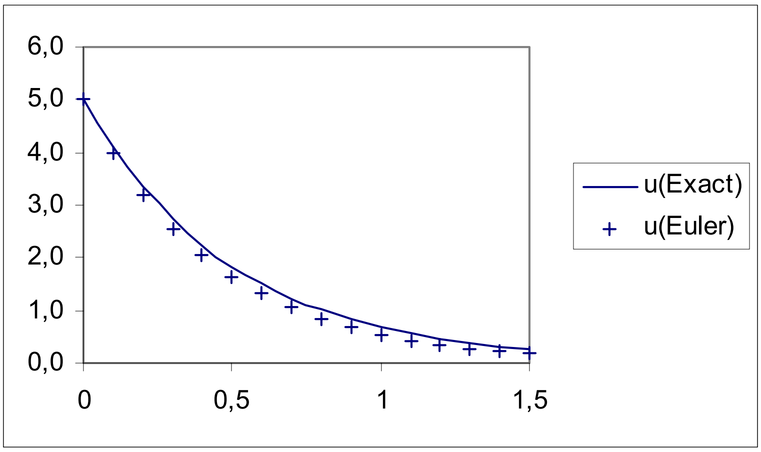
$$u = Ri = -R\frac{dq}{dt} = -RC\frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC}u$$

Solution analytique : $u_t = U_0 \exp\left[-\frac{1}{RC}t\right]$

Méthode d'EULER : $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i = u_i + \frac{-1}{RC}u_i \times \Delta t$

dt	0,1	s
RC	0,5	s
U0	5	V



	A	B	C	D
	t	u(Exact)	u(Euler)	Δu
7	0	=U0*EXP(-t/RC)	5	=dt*(-1/RC)*C7
8	=A7+dt	=U0*EXP(-t/RC)	=C7+D7	=dt*(-1/RC)*C8
9	=A8+dt	=U0*EXP(-t/RC)	=C8+D8	=dt*(-1/RC)*C9

Un pas d'intégration de valeur inférieure à 0,1 donnerait un meilleur résultat.

Exercice Euler3 : Cinétique chimique : Etude de la réaction de saponification de l'éthanoate d'éthyle

$$CH_3COOC_2H_5 + Na^+ + OH^- \rightarrow CH_3COO^- + Na^+ + C_2H_5OH$$

$CH_3COOC_2H_5$	OH^-	Na^+	CH_3COO^-
a	a	a	0
a-x	a-x	a	x

Notations :

a : valeur commune des concentrations molaires initiales de l'ester et des ions hydroxyde dans le mélange réactionnel

x : avancement volumique de la réaction

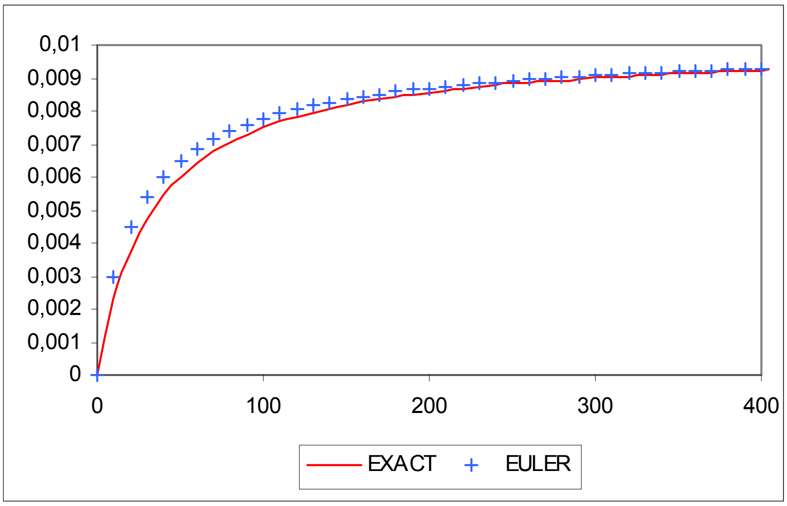
Supposons la réaction d'ordre global 2 (1 par rapport à l'ester et 1 par rapport à l'ion hydroxyde) : $\frac{dx}{dt} = k \times (a - x)^2$

dont la solution analytique est :

$$x = a \times \left(1 - \frac{1}{k \times t \times a + 1}\right)$$

On pourra comparer les valeurs obtenues par la méthode analytique et celles obtenues par la méthode d'EULER :

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta x_t = x_t + k \times (a - x_t)^2 \times \Delta t$$

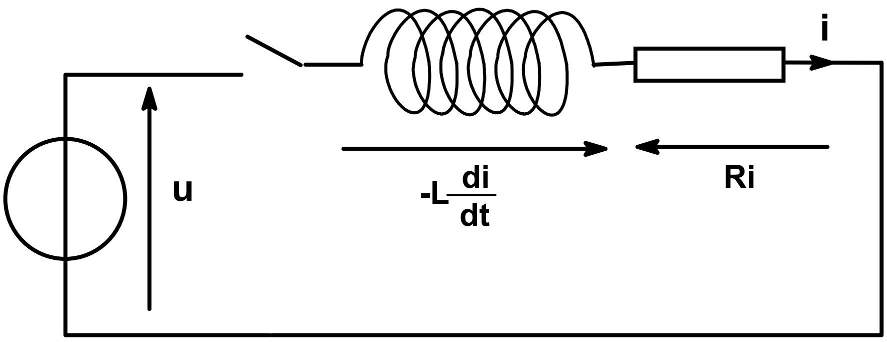


x=f(t)

Δt	k	c0
10	3	0,01
s	L/mol/s	mol/L

	A	B	C	D
	t	**xExact**	**xEULER**	**□x**
11	0	0	0	=h*k*(C0-C11)^2
12	=A11+Δt	=C0*(1-(1/(k*A12*C0+1)))	=C11+D11	=h*k*(C0-C12)^2

Exercice Euler4 : Etablissement d'un courant dans un circuit R,L : régime transitoire



$$Ri + L\frac{di}{dt} = u(t) = U\sqrt{2}\sin(2\pi ft)$$

soit :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{U}{L}\sqrt{2}\sin(2\pi ft)$$

Solution analytique :

C'est un équation différentielle du premier ordre du type : $\frac{dy}{dx} = -k \times y + f(x,y)$

Solution de l'équation sans second membre $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$:

$$i = A\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

Solution particulière (régime permanent) : $i = I\sqrt{2}\sin(2\pi ft + \varphi)$

Avec $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$ et $\tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$

Conditions initiales : i(t=0) = 0
On en déduit :

$$i = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin(-\varphi)\exp\left(-\frac{R}{L}\right)t\right]$$

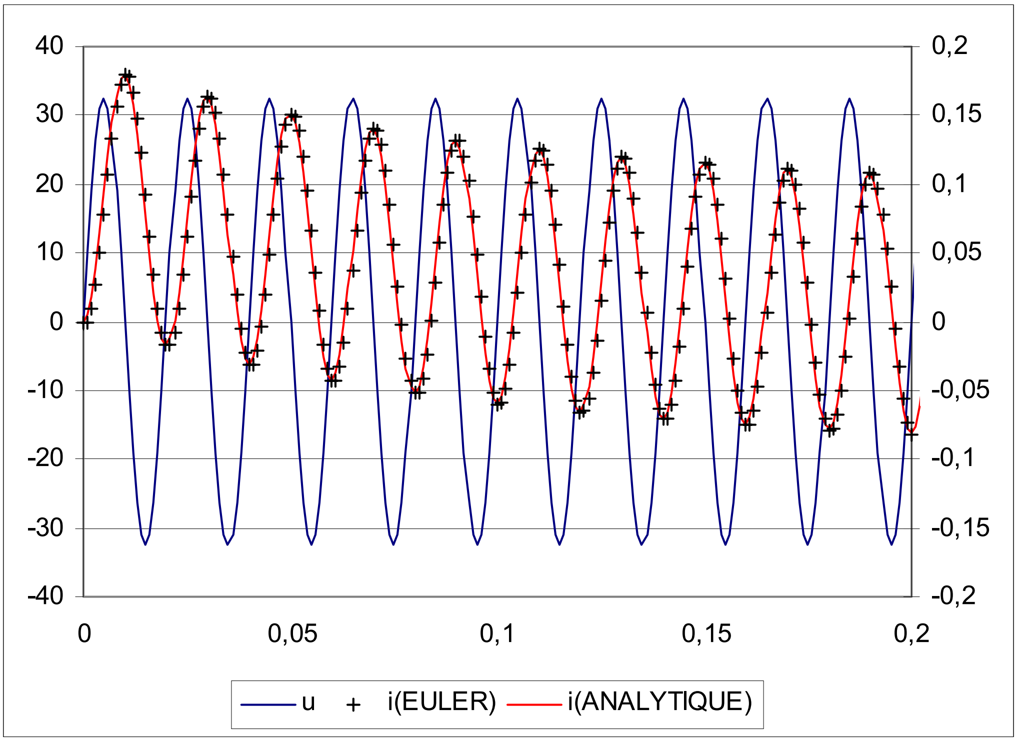
Méthode d'Euler : On utilise la relation $\left(\frac{di}{dt}\right)_t = \frac{U\sqrt{2}\sin(2\pi ft)}{L} - \frac{R}{L}(i)_t$ pour calculer de proche en proche les valeurs de i à partir de la valeur de i(t=0) =0

$$i_{t+dt} = i_t + \left(\frac{di}{dt}\right)_t dt = i_t + \frac{u_t - R \times i_t}{L}$$

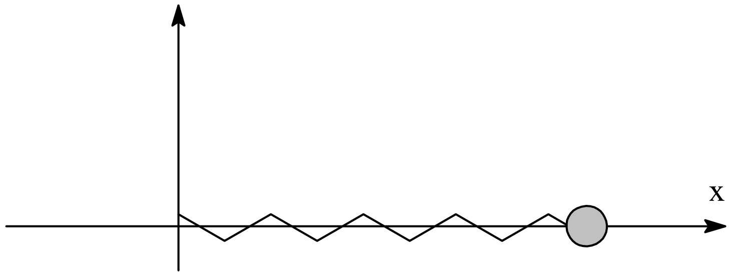
t	u	Δi	i
0	0		0
t	u(t)		
t+dt	u(t+dt)		

R	11	Ω
L	1,1	H
f	50	Hz
w	$= 2*\pi*f$	
Z	$=(R^2+L^2w^2)^{-1/2}$	Ω
U_{eff}	23	V
U_{max}	$=U_{eff}\times 1{,}141$	V
dt	0,001	s

	A	B	C	D	E
1	t	u	i	Δi	
2	0	= Umax SIN(w*t)	0	=(u-R*i)/L*dt	= Umax /Z* (SIN(w*t-1,54) – SIN(-1,54)*EXP(-10*t))
3	=A2+dt	= Umax **SIN(w***t)	=C2+D2	=(u-R*i)/L*dt	= Umax /Z * (SIN(w*t-1,54) – SIN(-1,54)*EXP(-10*t))
4	=A3+dt	= Umax **SIN(w***t)	=C3+D3	=(u-R*i)/L*dt	= Umax /Z * (SIN(w*t-1,54) – SIN(-1,54)*EXP(-10*t))
5	=A4+dt	= Umax *SIN(w*t)	=C4+D4	=(u-R*i)/L*dt	= Umax /Z * (SIN(w*t-1,54) – SIN(-1,54)*EXP(-10*t))



Exercice Euler5 : Oscillations amorties



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -h\frac{dx}{dt} - kx \quad \text{soit} \quad x''+2\alpha x'+\omega_0^2 x = 0$$

On pose : $x' = \frac{dx}{dt} = v$

L'équation ci-dessus devient : $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -2\alpha v - \omega_0^2 x = -\frac{h}{m}v - \frac{k}{m}x$

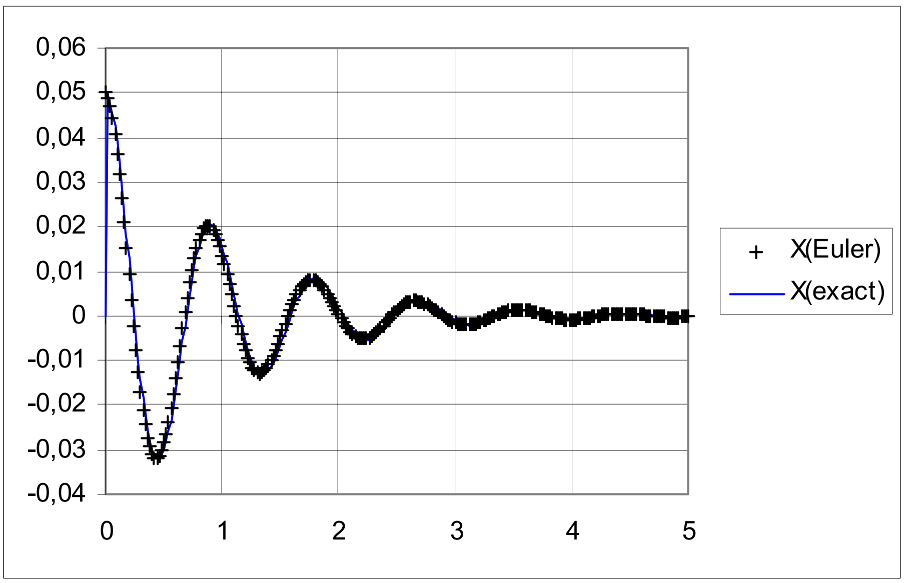
On a donc transformé l'équation différentielle du 2$^{\text{ème}}$ ordre en 2 équations différentielles du premier ordre :

- $\frac{dv}{dt} = -2\alpha v - \omega_0^2 x$ à partir de laquelle on obtient $v(t+dt) = v(t) - \left[\omega_0^2 x(t) + 2\alpha v(t)\right]dt$

On calcule de proche en proche les valeurs de la vitesse à partir des valeurs de v(t=0) et x(t=0).

- $\frac{dx}{dt} = v$ à partir de laquelle on obtient : $x(t+dt) = x(t) + v(t)\Delta t$. On calcule de proche en proche les valeurs de x(t) à partir de la valeur de x(t=0) et des valeurs de v(t) déterminées précédemment.

Remarque : lorsque l'on entreprend le calcul de x(t+dt),on connaît déjà la valeur de v(t+dt). Pour calculer v(t+dt), on peut utiliser $x(t+dt) = x(t) + v(t+dt)\Delta t$ ou mieux $x(t+dt) = x(t) + \frac{1}{2}\left[v(t) + v(t+\Delta t)\right]\Delta t$



x(t)

Solutions analytiques :

SI (α^2- w_0^2)<0 :

x=EXP(-α*t)*(x_0*COS((w_0^2-α^2)^0,5*t)+(v_0+α*x_0)/((w_0^2-α^2)^0,5)*SIN((w_0^2-α^2)^0,5*t))

SI (α^2- w_0^2)=0 x=EXP(-α*t)*(x0+(v0+α*x0)*t)

SI (α^2- w_0^2>0 :

x=EXP(-α*t)*(x0*COSH((-w_0^2+α^2)^0,5*t)+(v0+α*x0)/((-w_0^2+α^2)^0,5)*SINH((-w_0^2+α^2)^0,5*t)))

dt	w02	Alpha (α)	x0	v0
0,02	50	1	0,05	0
s	s^{-2}	s^{-1}	m	$m.s^{-1}$

	A	B	C	D	E
	t	V	ΔV	X(Euler)	ΔX
	0	=v0	=(-w02_*D30-2*α*B30)*dt	=x0	=V*dt
31	=A30+dt	=B30+C30	=(-w02_*D31-2*α*B31)*dt	=D30+E31	=V*dt
32	=A31+dt	=B31+C31	=(-w02_*D32-2*α*B32)*dt	=D31+E32	=V*dt
33	=A32+dt	=B32+C32	=(-w02_*D33-2*α*B33)*dt	=D32+E33	=V*dt
34	=A33+dt	=B33+C33	=(-w02_*D34-2*α*B34)*dt	=D33+E34	=V*dt

Pour calculer x(exact), on envisagera la possibilité d'observer un des trois régimes en utilisant la condition SI(conditions ;alors… ;sinon).

=SI((α^2- w_0^2)<0 ;
EXP(-α*t)*(x0*COS((w_0^2-α^2)^0,5*t)+(v0+α*x0)/((w_0^2-α^2)^0,5)*SIN((w_0^2-α^2)^0,5*t)) ;
SI((α^2- w_0^2)=0 ;
EXP(-α*t)*(x0+(v0+α*x0)*t) ;
EXP(-α*t)*(x0*COSH((-w_0^2+α^2)^0,5*t)+(v0+α*x0)/((-w_0^2+α^2)^0,5)*SINH((-w_0^2+α^2)^0,5*t))))

Etude les différents régimes :

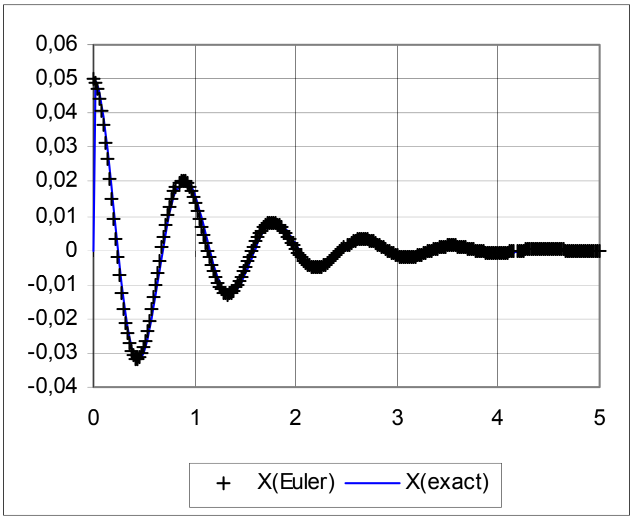
<table>
<tr><td>

Régime pseudo-périodique

$\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$

$y(0) = 0,05$ m
$v(0) = 0$ m.s^{-1}
$\alpha = 1$ s^{-1}
$\omega_0^2 = 50$ s^{-2}

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

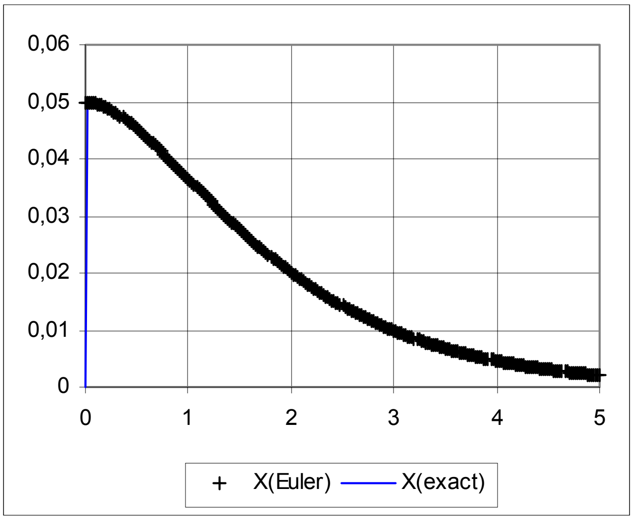
Régime critique

$\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$

$y(0) = 0,05$ m
$v(0) = 0$ m.s^{-1}
$\alpha = 1$ s^{-1}
$\omega_0^2 = 1$ s^{-2}

Le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement que dans le régime apériodique

</td><td>



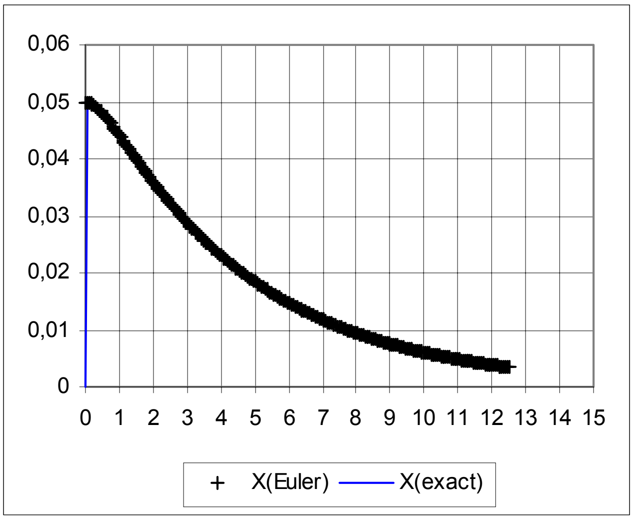
</td></tr>
<tr><td>

Régime apériodique

$\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$

$y(0) = 0,05$ m
$v(0) = 0$ m.s^{-1}
$\alpha = 1$ s^{-1}
$\omega_0^2 = 0,4$ s^{-2}

</td><td>



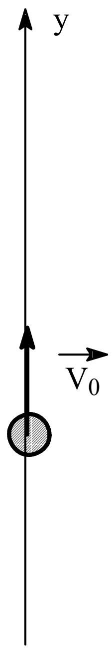
</td></tr>
</table>

Exercice Euler6 : Chute libre :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

Méthode d'EULER :

$$a = -g = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v(t+dt) = v(t) + \left(\frac{dv}{dt}\right)_t \times dt = v(t)-g\times dt$$



$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y(t+dt) = y(t) + \left(\frac{dy}{dt}\right)_t \times dt = y(t) + v(t) \times dt$$

La détermination des valeurs de y(t) peut se faire par une des trois méthodes suivantes :

$$y(t+dt) = y(t) + \left(\frac{dy}{dt}\right)_t \times dt = y(t) + v(t) \times dt \text{ noté } y_1$$

ou

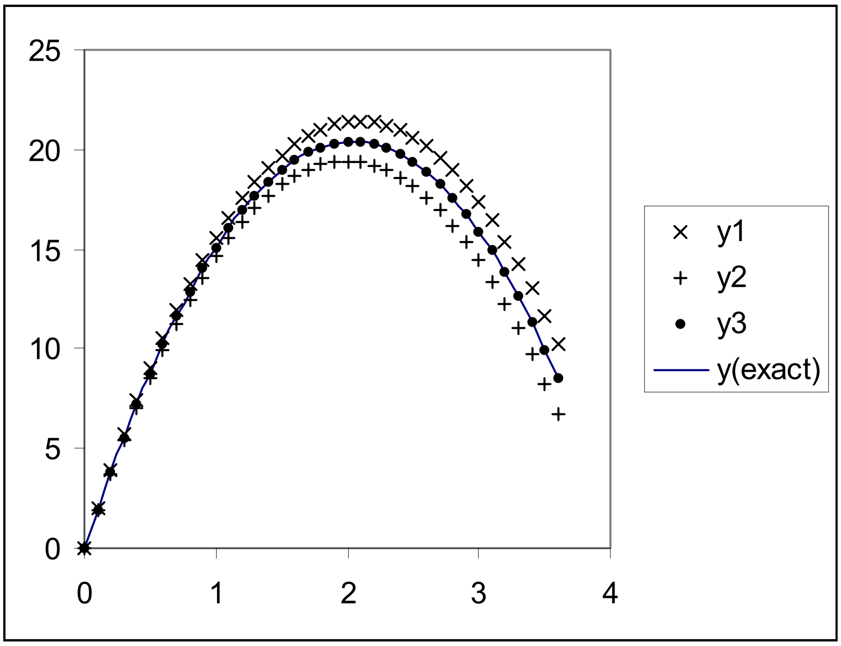
$$y(t+dt) = y(t) + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t+dt} \times dt = y(t) + v(t+dt) \times dt \text{ noté } y_2$$

ou

$$y(t+dt) = y(t) + \frac{1}{2}\{v(t+dt) + v(t)\} \times dt \text{ noté } y_3$$

Solution exacte :

$y=0,5\times g\times t^2+v_0\times t+y_0$



y(t)

y0	v0	g	dt
0	20,0	9,80	0,10
m	$m.s^{-1}$	$m.s^{-2}$	s

Cet exemple met en évidence l'intérêt du choix de la méthode (3) :

$$y(t+dt) = y(t) + \frac{1}{2}\{v(t+dt) + v(t)\} \times dt$$

Exercice Euler7 : Chute amortie par des forces de frottement pouvant être modélisée par -kV²

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = +mg - kv^2 \text{ ou } a = \frac{dv}{dt} = +g - \frac{k}{m}v^2 = g\left[1 - \frac{v^2}{v_L^2}\right],$$

V_L désignant la vitesse limite atteinte par l'objet.

Si on tient compte de la poussée d'Archimède, g' < g.

Résolution analytique

- **Expression de v(t)**

Effectuons les changements de variable : $v = u\, v_L$ et $t = \xi\frac{v_L}{g}$ avec $v_L = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

$$\frac{du}{dt} = \frac{g}{v_L}(1-u^2) \qquad \textbf{ou} \qquad \frac{du}{d\xi} = 1-u^2$$

Une primitive de $f(u) = \dfrac{1}{1-u^2}$ est de la forme : $F(u) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+u}{1-u} + cte$

Conditions initiales : t=0 ⇔ ξ=0 et $v=v_0$ ⇔ $u_0=v_0/v_L$

On obtient $\xi = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(1+u)(1-u_0)}{(1-u)(1+u_0)}$ soit $u = \dfrac{(1+u_0)\exp(2\xi) - (1-u_0)}{(1+u_0)\exp(2\xi) + (1-u_0)}$

dont on déduit : $v = v_L\dfrac{(v_L+v_0)\exp\left[\dfrac{2gt}{v_L}\right] - (v_L - v_0)}{(v_L+v_0)\exp\left[\dfrac{2gt}{v_L}\right] + (v_L - v_0)}$

<u>Si $v = v_0 = 0$</u>

$$v = v_L\frac{\exp\left[\frac{2gt}{v_L}\right] - 1}{\exp\left[\frac{2gt}{v_L}\right] + 1} = v_L \times \mathrm{TANH}\left[\frac{gt}{v_L}\right] = \frac{dz}{dt}$$

$$y = \frac{v_L^2}{g} \times \mathrm{LN}\left(\mathrm{COSH}\left[\frac{gt}{v_L}\right]\right)$$

- **Expression de v(y)**

$$\frac{du}{dt}=\frac{g}{v_L}(1-u^2)=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}=v_L u\frac{du}{dy} \qquad \text{soit} \qquad \frac{v_L^2}{2g}\frac{du^2}{dy}=(1-u^2)$$

On pose $y=\zeta\dfrac{v_L^2}{2g}$

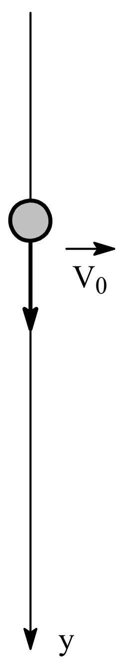
On obtient l'équation différentielle : $\dfrac{du}{d\zeta}=\dfrac{2u}{(1-u^2)}=1$

La solution qui vérifie les conditions initiales est :

$$\zeta=\ln\frac{1-u_0^2}{(1-u^2)} \qquad \text{ou} \qquad u^2=1-\left(1-u_0^2\right)\exp(-\zeta)$$

En revenant aux variables initiales : $v^2=v_L^2\left[1-\left(1-\dfrac{v_0^2}{v_L^2}\right)\exp\left(-\dfrac{2gy}{v_L^2}\right)\right]$

Résolution numérique



$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow v(t+dt)=v(t)+\left(\frac{dv}{dt}\right)_t\times dt=v(t)+\left[g-\frac{k}{m}v^2(t)\right]\times dt$$

$$v=\frac{dy}{dt}\Rightarrow y(t+dt)=y(t)+\left(\frac{dy}{dt}\right)_t\times dt=y(t)+v(t)\times dt$$

La détermination des valeurs de y(t) peut se faire par une des trois méthodes suivantes :

$$y(t+dt)=y(t)+\left(\frac{dy}{dt}\right)_t\times dt=y(t)+v(t)\times dt$$

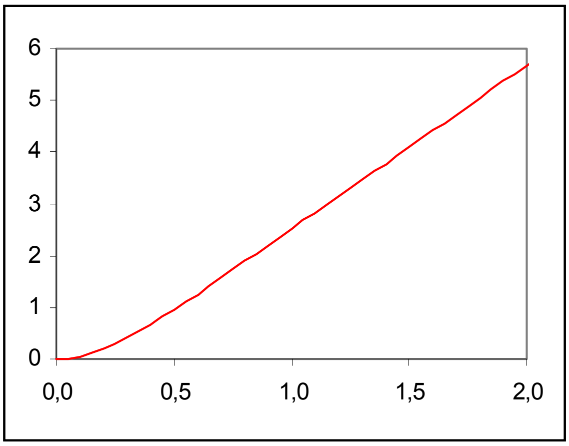
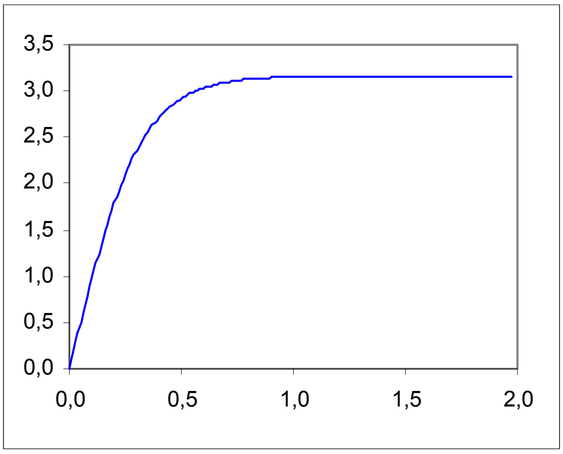
ou

$$y(t+dt)=y(t)+\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t+dt}\times dt=y(t)+v(t+dt)\times dt$$

ou

$$y(t+dt)=y(t)+\frac{1}{2}\{v(t+dt)+v(t)\}\times dt$$

Résultats de la résolution numérique :

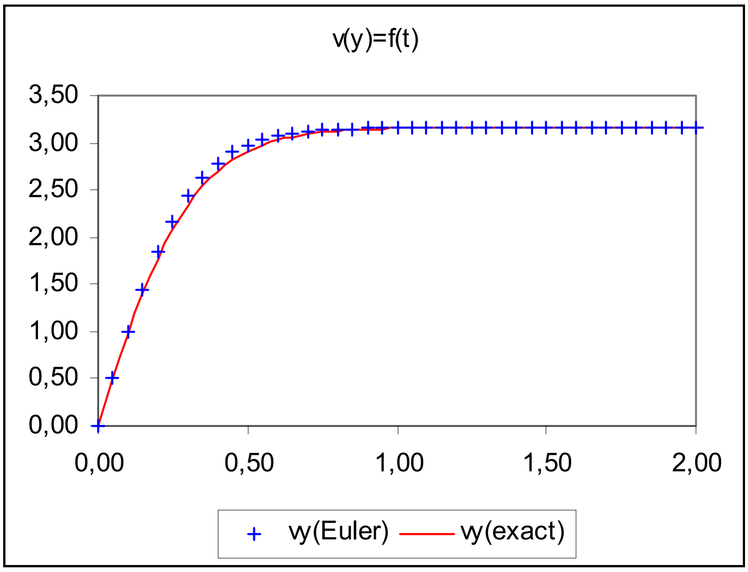
	
Y=f(t)	**V(y)=h(t)**

dt	0,010	s
g	10,00	$m.s^{-2}$

B=k/m	1,00	m^{-1}
vy0	0,00	$m.s^{-1}$

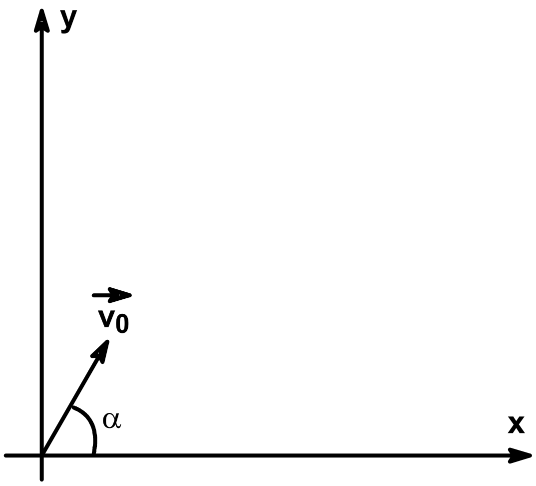
	B	C	D	E	F
	t	ΔVy	Vy	Δy	y
10	0	=(g-B*Vy^2)xdt	0	=Vy*dt	0
11	=B10+dt	=(g-B*Vy^2)*dt	=D10+C10*dt	=Vy*dt	=F10+E10
12	=B11+dt	=(g-B*Vy^2)*dt	=D11+C11*dt	=Vy*dt	=F11+E11

Comparaison des résultats obtenus par la résolution numérique et la résolution analytique : dt = 0,05 s



Exercice Euler8 : Mouvement d'un projectile sans frottements (β=0)
Exercice Euler9 : Mouvement d'un projectile avec frottements ($\beta \neq 0$)

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -mg\,\overrightarrow{j} - \beta \times \left(V_x^2\,\overrightarrow{i} + \frac{V_y^3}{|v_y|}\,\overrightarrow{j} \right)$$



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{R_f}$$

$\overrightarrow{R_f} = -\beta \times \left(V_x^2\,\vec{i} + \frac{V_y^3}{|v_y|}\,\vec{j} \right)$. L'expression $\frac{V_y^3}{|v_y|}$ permet de tenir compte de la valeur algébrique.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\beta \times V_x^2 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g - \beta \times \dfrac{V_y^3}{|V_y|} \end{cases}$$

Méthode d'EULER :

A partir des conditions initiales : t=0 ; y(0)=0; x(0) =0; $v_x(0)$, $v_y(0)$, on calcule de proche en proches les valeurs suivantes :

$$t_{i+1} = t_i + dt$$

$$(v_x)_{i+1} = (v_x)_i + (\Delta v_x)_i \times dt \text{ avec } (\Delta v)_i = (a_x)_i \times \Delta t = -\beta \times (V_x^2)_i \times \Delta t$$

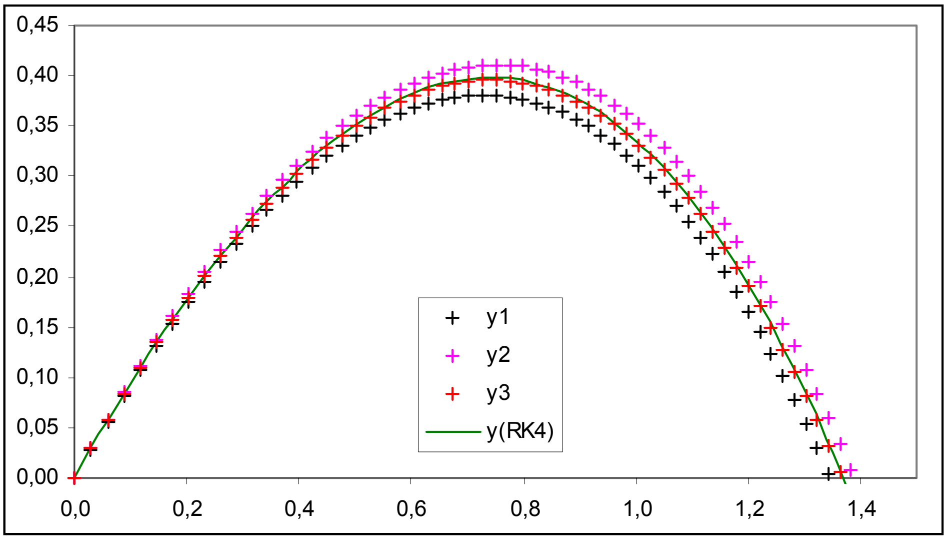
$$(v_y)_{i+1} = (v_y)_i + (\Delta v_y)_i \times dt \text{ avec } \Delta(v_y)_i = (a_y)_i \times \Delta t = -g - \beta \times \left(\frac{V_y^3}{|V_y|} \right)_i \times \Delta t$$

Pour la détermination de x_{i+1} et y_{i+1}, on peut utiliser une des trois méthodes suivantes :

Méthode(1) (y_1)	Méthode(2) (y_2)	Méthode(3) (y_3)
$x_{i+1} = x_i + (V_x)_i \times dt$	$x_{i+1} = x_i + (V_x)_{i+1} \times dt$	$x_{i+1} = x_i + \frac{(V_x)_i + (V_x)_{i+1}}{2} \times dt$
$y_{i+1} = y_i + (V_y)_i \times dt$	$y_{i+1} = y_i + (V_y)_{i+1} \times dt$	$y_{i+1} = y_i + \frac{(V_y)_i + (V_y)_{i+1}}{2} \times dt$

Dans Interactive Physique, c'est la deuxième méthode qui est utilisée !

B	0,03	m^{-1}
V0x	3,0	$m.s^{-1}$
V0y	3,0	$m.s^{-1}$
x0	0,00	m
y0	0,00	m
g	10,0	$m.s^{-2}$
dt	0,12	s



y1 = f(x1) : valeurs obtenues en utilisant la méthode (1).
Y2 = f(x2) : valeurs obtenues en utilisant la méthode (2).
Y3 = f(x3) : valeurs obtenues en utilisant la méthode (3).

La troisième méthode semble plus précise. La solution obtenue par la méthode RK4 et un pas identique étant prise comme référence.