Résolution numérique d'une équation différentielle
Méthode de RUNGE-KUTTA RK2

Cas d'une équation différentielle du premier ordre dont la forme mathématique est :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Dans la méthode d'EULER, on exprime **y(x+h) par $\mathbf{y(x+h) = y(x)+h\times f(x,y)}$**

Dans la méthode de Runge-Kutta d'ordre2, on exprime y(x+h) sous la forme :

$$y(x+h) = y(x) + Ah\times f_1 + Bh\times f_2 = y(x) + A\times k_1 + B\times k_2$$

Avec

$$f_1 = f(x, y) = \frac{k_1}{h}$$

$$f_2 = f(x + Ph\ ,\ y + Qhf(x, y)) = f(x + Ph\ ,\ y + Qk_1) = \frac{k_2}{h}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + Ah \times f(x, y) + Bh \times f\left(x + Ph, y + Qhf(x, y)\right) \\ &= y(x) + Ak_1 + Bk_2 \end{aligned}$$

Considérons l'équation différentielle du premier ordre : $y'(x) = f(x, y(x))$

Développons y(x+h) en série de Taylor :

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + h\frac{dy(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y(x)}{dx^2} + O(h^3) \\ &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + O(h^3) \qquad (1) \\ &= y(x) + hf(x, y) + \frac{h^2}{2}y''(x) + O(h^3) \end{aligned}$$

De $y'(x) = f(x, y(x))$

On déduit :

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y(x))\frac{\partial f}{\partial y}$$

La relation (1) devient :

$$\boxed{y(x+h) = y(x) + hf(x, y) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}\right) + O(h^3) \qquad (2)}$$

Cherchons une autre expression de y(x+h) en utilisant la méthode de Runge-Kutta de rang 2 :

$$y(x+h) = y(x) + Ahf_1 + Bhf_2 \qquad \textbf{(3)}$$

Avec

$f_1 = f(x,y)$

$f_2 = f(x+Ph\ ,\ y+Qhf(x,y))$

Exprimons f_2 en fonction de f(x,y) :

$$\begin{aligned} f_2 &= f(x+Ph\ ,\ y+Qhf(x,y)) \\ &= f(x,y) + Ph \times \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} + Qh \times f(x,y) \times \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} + O(h^2) \qquad (4) \end{aligned}$$

Combinons (3) et (4) :

$$y(x+h) = y(x) + (A+B)hf(x,y) + Bh^2 P \times \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} + Bh^2 Q \times f(x,y) \times \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} + O(h^3)$$

En comparant cette expression et (2), on obtient :

$$(A+B) = 1 \qquad BP = \frac{1}{2} \qquad BQ = \frac{1}{2}$$

$P = Q = \dfrac{1}{2B}$

A = 1 - B

Le paramètre B est indéterminé !

Les valeurs couramment employées sont :

B = ½ A = B = ½ ; P = Q = 1 $y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{2}[f(x,y) + f(x+h, y+hf(x,y))]h$ $= y(x) + \frac{1}{2}[f(x,y) + f(x+h, y+k_1]h$ $= y(x) + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$	B = 1 : A = 0 ; P = Q = ½ $y(x+h) \approx y(x) + hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x,y)\right)$ $= y(x) + hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right)$ $= y(x) + k_2$
C'est la méthode de **HEUN**	C'est la méthode d'**EULER améliorée**.

Interprétation géométrique de la méthode d'EULER améliorée

Point P_i :

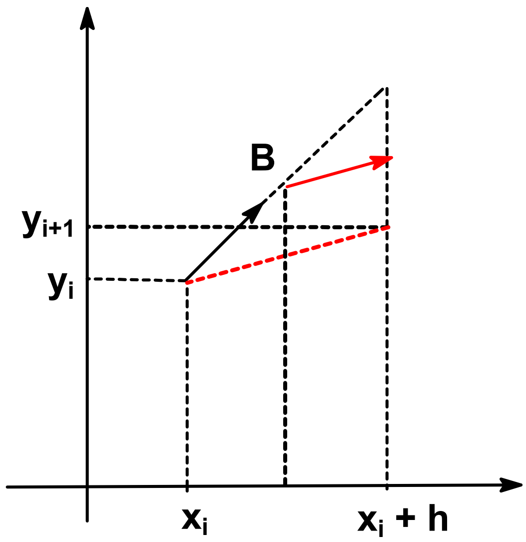
$$\begin{cases} x_i \\ y_i \\ \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_i = f(x_i, y_i) = \dfrac{k_1}{h} \end{cases}$$

Point B :

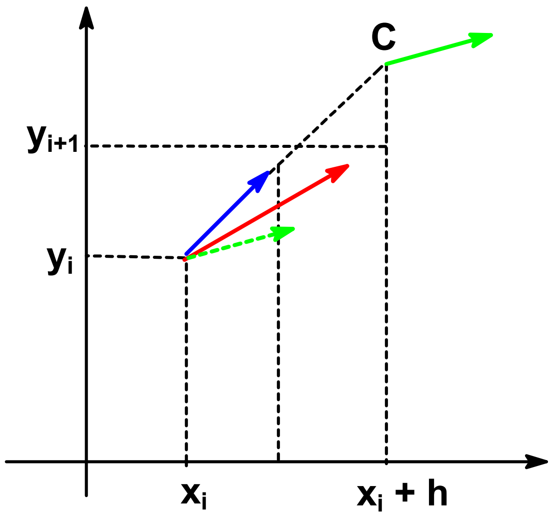
$$\begin{cases} x_{Bi} = x_i + \dfrac{h}{2} \\ y_{Bi} = y_i + \dfrac{k_1}{2} \\ \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{ib} = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1}{2}\right) = \dfrac{k_2}{h} \end{cases}$$

Point P_{i+1} :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + k_2 \\ \quad\quad = y_i + hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1}{2}\right) \end{cases}$$



Interprétation géométrique de la méthode de HEUN

Point P_i : $$\begin{cases} x_i \\ y_i \\ \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_i = f(x_i, y_i) = \dfrac{k_1}{h} \end{cases}$$	
Point C : $$\begin{cases} x_{Ci} = x_i + h \\ y_{Ci} = y_i + k_1 \\ \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{ib} = f(x_i + h, y_i + k_1) = \dfrac{k_2}{h} \end{cases}$$	
Point P_{i+1} : $$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$	

<u>Exemple mathématique :</u> considérons l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = -2x.y$ avec $y_{(x=0)}=1$

La solution analytique est : $y = \exp(-x^2)$

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0,1	0,9900
2	0,2	0,9608
3	0,3	0,9139
4	0,4	0,8521
5	0,5	0,7788

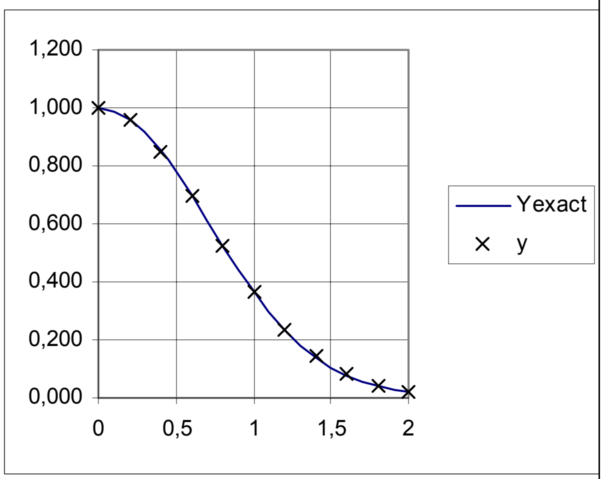
Methode RK2 (EULER améliorée):

i	x_i	y_i	$k_1=-2 \times x_i \times y_i \times \Delta x$	$k_2 = -2 \times (x_i+\Delta x/2)\times(y_i + k_1/2)\times\Delta x$
0	0	1	$-2\times0\times1\times0,1=0$	$-2\times0,05\times1\times0,1=-0,01$
1	0,1	0,99	$-2\times0,1\times1\times0,1=-0,02$	$-2\times0,15\times0,98\times0,1=-0,03$
2	0,2	0,96	$-2\times0,2\times0,96\times0,1=-0,04$	$-2\times0,25\times0,94\times0,1=-0,05$
3	0,3	0,91	$-2\times0,3\times0,91\times0,1=-0,055$	$-2\times0,35\times0,88\times0,1=-0,06$
4	0,4	0,85	$-2\times0,4\times0,85\times0,1=-0,07$	$-2\times0,45\times0,81\times0,1=-0,07$
5	0,5	0,78		

Avec EXCEL :

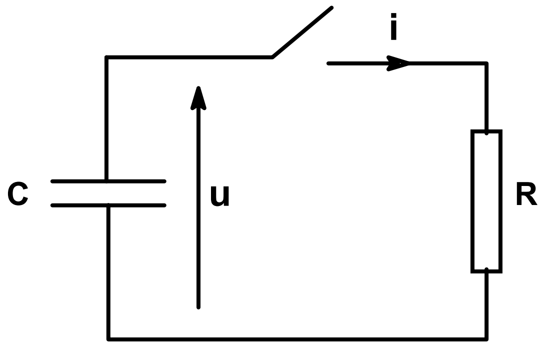
	A	B	C	D
	x	k1	k2	y
6	0	=-2*x*y*dx	=-2*(x+dx/2)*(y+k1/2)	1
7	=A6+dx	=-2*x*y*dx	=-2*(x+dx/2)*(y+k1/2)*dx	=D6+C6
8	=A7+dx	=-2*x*y*dx	=-2*(x+dx/2)*(y+k1/2)*dx	=D7+C7
9	=A8+dx	=-2*x*y*dx	=-2*(x+dx/2)*(y+k1/2)*dx	=D8+C8
10	=A9+dx	=-2*x*y*dx	=-2*(x+dx/2)*(y+k1/2)*dx	=D9+C9

x	**Yexact**	**k1**	**k2**	**y**
0	1,000	0,000	-0,040	1,000
0,2	0,961	-0,077	-0,111	0,960
0,4	0,852	-0,136	-0,156	0,849
0,6	0,698	-0,166	-0,171	0,693
0,8	0,527	-0,169	-0,158	0,522
1	0,368	-0,147	-0,128	0,365
1,2	0,237	-0,114	-0,093	0,237
1,4	0,141	-0,079	-0,062	0,143
1,6	0,077	-0,049	-0,038	0,081
1,8	0,039	-0,028	-0,022	0,043
2	0,018	-0,015	-0,011	0,021



Les résultats sont meilleurs que ceux obtenus par la méthode d'EULER.

Exercice RK2 1 : Décharge d'un condensateur dans une résistance.



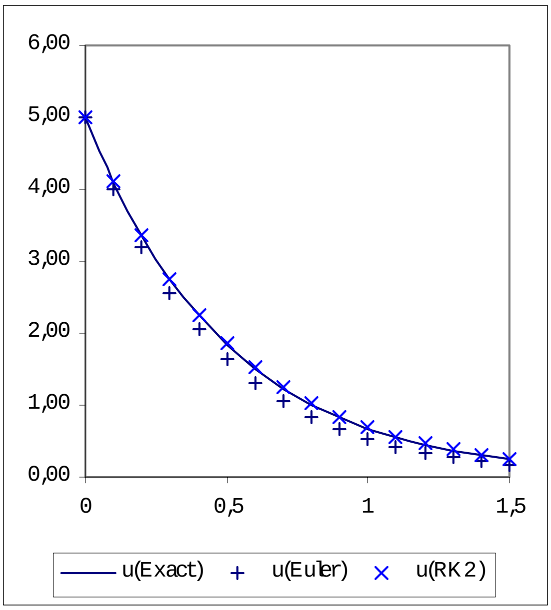
$$u = Ri = -R\frac{dq}{dt} = -RC\frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC}u$$

Méthode RK2 : $k_1 = -\frac{1}{RC}u_t dt$ $\quad k_2 = -\frac{1}{RC}\left(u_t + \frac{k_1}{2}\right)dt$

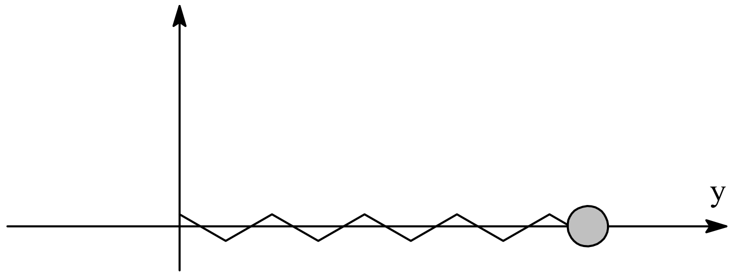
dt	0,1	s
RC	0,5	s
U0	5	V

	A	B	C	D
	t	**u(RK2)**	**k1**	**k2**
7	0	=U0	=dt*(-1/RC)*B7	=dt*(-1/RC)*(B7+k1_/2)
8	=A7+dt	=B7+D7	=dt*(-1/RC)*B8	=dt*(-1/RC)*(B8+k1_/2)
9	=A8+dt	=B8+D8	=dt*(-1/RC)*B9	=dt*(-1/RC)*(B9+k1_/2)
10	=A9+dt	=B9+D9	=dt*(-1/RC)*B10	=dt*(-1/RC)*(B10+k1_/2)



Exercice RK2 2 : Oscillateur amorti

$$y''+2\alpha y'+\omega_0^2 y=0$$



On pose : $\frac{dy}{dt}=v$

L'équation ci-dessus devient : $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=-2\alpha y'-\omega_0^2 y$

Méthode RK2 (EULER améliorée) :

Point P_i :	$\begin{cases} t_i \\ y_i \\ v_i \end{cases}$ $\left(\frac{dy}{dt}\right)_i=v_i=\frac{j_1}{h}$ $\left(\frac{dv}{dt}\right)_i=-2\alpha\times v_i-\omega_0^2\times y_i=\frac{k_1}{h}$
B	$\begin{cases} t_i+\frac{h}{2} \\ y_i+\left(\frac{dy}{dt}\right)_i\times\frac{h}{2}=y_i+\frac{j_1}{2} \\ v_i+\left(\frac{dv}{dt}\right)_i\times\frac{h}{2}=v_i+\frac{k_1}{2} \end{cases}$ $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ib}=v_i+\frac{k_1}{2}=\frac{j_2}{h}$ $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{ib}=-2\alpha\times\left(v_i+\frac{k_1}{2}\right)-\omega_0^2\times\left(y_i+\frac{j_1}{2}\right)=\frac{k_2}{h}$
Point P_{i+1} :	$\begin{cases} t_{i+1}=t_i+h \\ y_{i+1}=y_i+j_2 \\ v_{i+1}=v_i+k_2 \end{cases}$

Soit :

$j_1=v_t\times dt$ $\quad$ $k_1=\left(-2\alpha\times v_t-\omega_0^2\times y_t\right)\times dt$

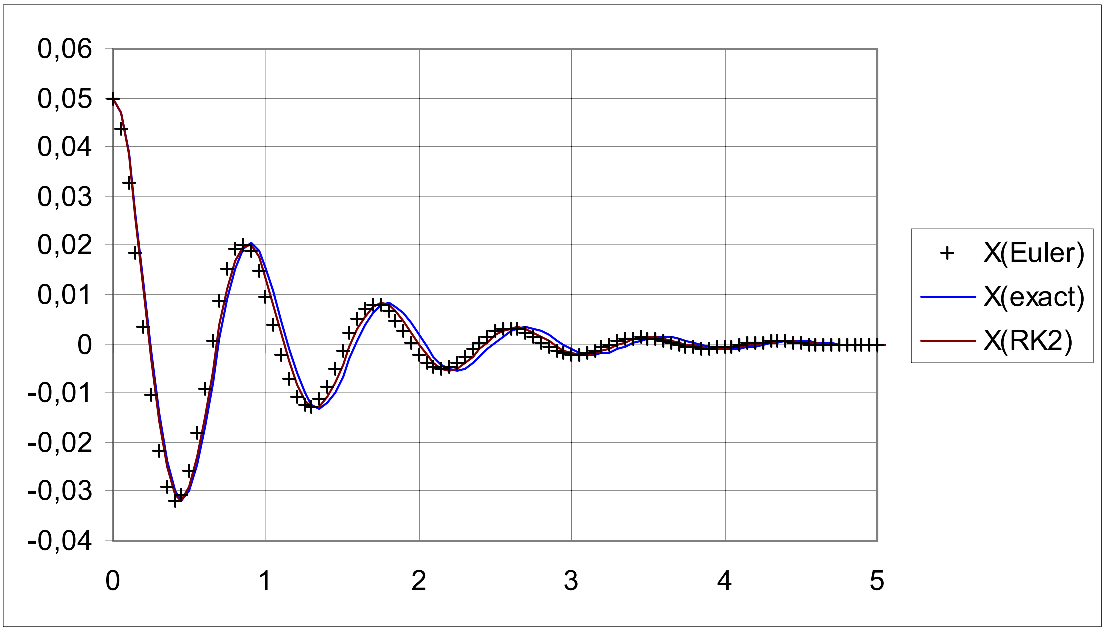
$$j_2 = \left[v_t + \frac{k_1}{2}\right] \times dt \qquad k_2 = \left(-2\alpha \times \left[v_t + \frac{k_1}{2}\right] - \omega_0^2 \times \left[y_t + \frac{j_1}{2}\right]\right) \times dt$$

$$v(t+dt) = v_t + k_2 \qquad y(t+dt) = y_t + j_2$$

	A	B	C	D	E
	t	**V(RK2)**	**X(RK2)**	**j1**	**k1**
30	0	0	5	=B30*dt	=(-2*alpha*B30-w02_*C30)*dt
31	=A30+dt	=B30+G30	=C30+F30	=B31*dt	=(-2*alpha*B31-w02_*C31)*dt
32	=A31+dt	=B31+G31	=C31+F31	=B32*dt	=(-2*alpha*B32-w02_*C32)*dt
33	=A32+dt	=B32+G32	=C32+F32	=B33*dt	=(-2*alpha*B33-w02_*C33)*dt
34	=A33+dt	=B33+G33	=C33+F33	=B34*dt	=(-2*alpha*B34-w02_*C34)*dt

	F	G
	j2	**k2**
30	=(B30+k1_/2)*dt	=(-w02_*(C30+j1_/2)-2*a*(B30+k1_/2))*dt
31	=(B31+k1_/2)*dt	=(-w02_*(C31+j1_/2)-2*a*(B31+k1_/2))*dt
32	=(B32+k1_/2)*dt	=(-w02_*(C32+j1_/2)-2*a*(B32+k1_/2))*dt
33	=(B33+k1_/2)*dt	=(-w02_*(C33+j1_/2)-2*a*(B33+k1_/2))*dt
34	=(B34+k1_/2)*dt	=(-w02_*(C34+j1_/2)-2*a*(B34+k1_/2))*dt

dt	w02	alpha	x0	v0
0,05	50	1	0,05	0
s	s^{-2}	s^{-1}	m	$m.s^{-1}$



La valeur de Δt a été choisie pour mettre en évidence la précision des 2 méthodes d'intégration numérique.